P. Gabriel

Introduction aux équations différentielles

Table des matières

1 Théorie générale : existence, unicité

On s'intéresse à des équations différentielles d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire des équations de la forme

$$X' = f(t, X) \tag{1}$$

où l'inconnue est $X = X(t)$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ est une fonction donnée avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$. On supposera toujours que f est continue.

Définition 1.1. *On appelle* solution *de l'équation différentielle* (1) *toute fonction X de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $J \subset I$ et à valeurs dans Ω qui satisfait*

$$X'(t) = f(t, X(t)) \qquad \textit{pour tout} \;\; t \in J.$$

Il sera utile de remarquer que l'équation différentielle est équivalente à sa forme intégrale

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\, dx$$

où $t_0 \in J$. Cette remarque motive l'intérêt du lemme classique suivant.

Lemme 1.2 (Grönwall)**.** *Soient u, a, b trois fonctions continues sur un intervalle $[t_0, t_1]$ à valeurs réelles. Si la fonction a est positive et que*

$$u(t) \leqslant b(t) + \int_{t_0}^{t} a(s)u(s)\, ds \qquad \textit{pour tout} \quad t \in [t_0, t_1],$$

alors

$$u(t) \leqslant b(t) + \int_{t_0}^{t} a(s)b(s)e^{\int_s^t a(s')ds'} ds \qquad \textit{pour tout} \quad t \in [t_0, t_1].$$

Démonstration. On pose $v(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)u(s)\, ds$. Cette fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifie l'inégalité différentielle

$$v'(t) \leqslant a(t)b(t) + a(t)v(t),$$

et donc

$$\frac{d}{dt}\Big(v(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}\Big) \leqslant a(t)b(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}.$$

Puisque $v(t_0) = 0$, on en déduit par intégration que

$$v(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} \leqslant \int_{t_0}^{t} a(s)b(s)e^{-\int_{t_0}^s a(s')ds'} ds,$$

qui s'écrit aussi

$$v(t) \leqslant \int_{t_0}^{t} a(s)b(s)e^{\int_s^t a(s')ds'} ds.$$

En injectant cette information dans l'hypothèse du lemme on obtient bien la conclusion. □

Remarque 1.3. *Dans le cas où a et b sont des constantes, on obtient que*

$$u(t) \leqslant b\, e^{(t-t_0)a}.$$

1.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

On appelle problème de Cauchy le système d'équations

$$\begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)), & t \in J, \\ X(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2}$$

où $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$ est donné.

Définition 1.4. *On dit qu'une fonction $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ est* localement lipschitzienne en sa seconde variable *si pour tout intervalle $[t_-, t_+] \subset I$ et tout compact $K \subset \Omega$ il existe $L > 0$ tel que*

$$\forall t \in [t_-, t_+], \forall x, y \in K, \qquad \|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant L\|x - y\|. \tag{3}$$

Le théorème qui suit est un résultat d'existence locale et d'unicité pour le problème de Cauchy (2).

Théorème 1.5 (Cauchy-Lipschitz)**.** *Supposons que f est continue sur $I \times \Omega$ et localement lipschitzienne en sa seconde variable. Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$:*

(i) il existe $\tau > 0$ et $X \in \mathcal{C}^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau], \Omega)$ solution de (2) *avec $J = [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$;*

(ii) si X_1 et X_2 sont des solutions de (2) *sur des intervalles J_1 et J_2, alors $X_1 = X_2$ sur $J_1 \cap J_2$.*

Démonstration. (i) Existence. On démontre un résultat un peu plus fort, à savoir que :

Pour tout intervalle $[t_-, t_+] \subset I$ et tout compact $K \subset \Omega$, il existe $\tau > 0$ tel que pour tout $(t_0, x_0) \in [t_-, t_+] \times K$ il existe une solution $X \in \mathcal{C}^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau], \Omega)$ de (2) avec $J = [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.

L'idée de la démonstration est de réécrire le problème de Cauchy (2) sous la forme intégrale

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\, ds$$

et d'utiliser le théorème de Banach-Picard pour obtenir l'existence d'un point fixe pour l'opérateur Γ défini par

$$\Gamma X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\, ds.$$

Soient $[t_-, t_+] \subset I$ et $K \subset \Omega$ compact. On se donne $\epsilon > 0$ assez petit pour que $[t_-^\epsilon, t_+^\epsilon] := [t_- - \epsilon, t_+ + \epsilon] \subset I$ et $K_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^d,\ d(x, K) \leqslant \epsilon\} \subset \Omega$, et on note L_ϵ la constante de Lipschitz locale correspondant à $[t_-^\epsilon, t_+^\epsilon]$ et K_ϵ. Comme f est continue, il existe une constante M_ϵ telle que

$$\|f(t,x)\| \leqslant M_\epsilon \qquad \text{pour tous } \ t \in [t_-^\epsilon, t_+^\epsilon] \ \text{ et } \ x \in K_\epsilon.$$

On choisit alors $\tau > 0$ suffisamment petit pour que

$$\tau \leqslant \epsilon, \qquad \tau M_\epsilon \leqslant \epsilon \qquad \text{et} \qquad \tau L_\epsilon < 1.$$

On fixe maintenant $(t_0, x_0) \in [t_-, t_+] \times K$. La condition $\tau \leqslant \epsilon$ assure que ΓX est bien défini pour X dans

$$E := \mathcal{C}([t_0 - \tau, t_0 + \tau], K_\epsilon).$$

La condition $\tau M_\epsilon \leqslant \epsilon$ assure que l'opérateur Γ ainsi défini envoie E dans lui-même puisque pour tout $X \in E$ et tout $t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ on a

$$\|\Gamma X(t) - x_0\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, X(s))\|\, ds \right| \leqslant |t - t_0| M_\epsilon \leqslant \tau M_\epsilon \leqslant \epsilon.$$

Muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, l'espace E est un espace de Banach, et la dernière condition $\tau L_\epsilon < 1$ assure que Γ est une contraction stricte pour cette norme puisque pour tous $X, Y \in E$ et tout $t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ on a

$$\|\Gamma X(t) - \Gamma Y(t)\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, X(s)) - f(s, Y(s))\|\, ds \right| \leqslant \tau L_\epsilon \|X - Y\|_\infty.$$

Le théorème de point fixe de Banach-Picard assure donc l'existence d'un unique point fixe dans E pour l'opérateur Γ, et ce point fixe est la solution recherchée.

(ii) Unicité. Soient X_1 et X_2 des solutions de (2) sur des intervalles J_1 et J_2. On suppose que $J_1 \cap J_2$ n'est pas réduit à $\{t_0\}$, auquel cas le résultat est immédiat. On a alors que l'intervalle $J_1 \cap J_2$ n'est pas d'intérieur vide et on note $]t_-, t_+[$ cet intérieur. Remarquons que nécessairement $t_- \leqslant t_0 \leqslant t_+$.

Si $t_+ > t_0$, alors pour tout $\epsilon \in]0, t_+ - t_0[$ les fonctions X_1 et X_2 sont continues sur $[t_0, t_+ - \epsilon]$ et leur image sur cet intervalle compact est donc compacte dans Ω. On note K_ϵ la réunion de ces deux images et L_ϵ la constante de Lipschitz de f sur $[t_0, t_+ - \epsilon] \times K_\epsilon$. On a alors

$$\|X_1(t) - X_2(t)\| \leqslant \|X_1(t_0) - X_2(t_0)\| + L_\epsilon \int_{t_0}^{t} \|X_1(s) - X_2(s)\|\, ds$$

sur $[t_0, t_+ - \epsilon]$ et le lemme de Grönwall nous assure que

$$\|X_1(t) - X_2(t)\| \leqslant e^{L_\epsilon (t-t_0)} \|X_1(t_0) - X_2(t_0)\| = 0$$

pour tout $t \in [t_0, t_+ - \epsilon]$. On en déduit l'égalité de X_1 et X_2 sur $[t_0, t_+[$, et même sur $[t_0, t_+]$ si $t_+ \in J_1 \cap J_2$ par continuité de X_1 et X_2.

Si $t_- < t_0$ on obtient de la même manière l'égalité de X_1 et X_2 sur $[t_-, t_0] \cap J_1 \cap J_2$ en écrivant que

$$X_1(t_0 - t) - X_2(t_0 - t) = X_1(t_0) - X_2(t_0) - \int_0^t \big(f(t_0 - s, X_1(t_0 - s)) - f(t_0, s, X_2(t_0 - s))\big)\, ds$$

pour tout $t \in [0, t_0 - t_-[$ et en appliquant le lemme de Grönwall. □

1.2 Solutions maximales et solutions globales

Le résultat d'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz assure qu'il existe un plus grand intervalle $J \subset I$ sur lequel le problème de Cauchy (2) admet une solution, et que cette solution est unique. Cette solution est appelée *solution maximale* : par définition on ne peut pas la prolonger au delà de J. Lorsque $J = I$, on dit que cette solution est *globale*.

Théorème 1.6 (sortie de tout compact)**.** *On se place sous les mêmes hypothèses sur f que dans le théorème 1.5, et on considère $X \in \mathcal{C}^1(J, \Omega)$ une solution maximale de (1). Alors ou bien $\sup J = \sup I$ ou bien "X sort de tout compact de Ω", c'est-à-dire que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $t_K < \sup J$ tel que*

$$X(t) \in \Omega \backslash K \qquad \textit{pour tout } \; t \in J \cap [t_K, +\infty).$$

Et on a le résultat analogue pour les bornes inférieures.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $t_+ := \sup J < \sup I$ et qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ et une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset J$ tendant vers t_+ telle que $(X(t_n)) \subset K$. Comme on l'a montré dans la preuve du point *(i)* du théorème 1.5, on peut trouver un $\tau > 0$ tel que pour tout $(s_0, y_0) \in [t_0, t_+] \times K$ il existe une solution $Y \in \mathcal{C}^1([s_0 - \tau, s_0 + \tau], \Omega)$ de (1) telle que $Y(s_0) = y_0$. Comme t_n tend vers t_+, il existe un n_0 tel que $t_{n_0} \in [t_+ - \tau/2, t_+]$ et donc une solution $Y \in \mathcal{C}^1([t_{n_0} - \tau, t_{n_0} + \tau], \Omega)$ de (1) telle que $Y(t_{n_0}) = X(t_{n_0})$. Ceci contredit le fait que X soit une solution maximale puisque $t_{n_0} + \tau > t_+$. □

Corollaire 1.7. *On considère le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$ et on suppose que f est continue sur $I \times \mathbb{R}^d$, localement lipschitzienne en sa seconde variable, et que pour tout $[t_-, t_+] \subset I$ il existe $M > 0$ tel que*

$$\forall t \in [t_-, t_+], \forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad \|f(t,x)\| \leqslant M(1 + \|x\|). \tag{4}$$

Alors toutes les solutions maximales de (1) sont globales.

Démonstration. Soit $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^d$ et soit $X \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^d)$ la solution maximale de (2). Supposons par l'absurde que $t_+ := \sup J < \sup I$. On part alors de

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\, ds$$

pour en déduire en utilisant (4) l'existence d'un $M > 0$ tel que

$$\|X(t)\| \leqslant \|x_0\| + M(t_+ - t_0) + M\int_{t_0}^{t} \|X(s)\|\,ds$$

pour tout $t \in [t_0, t_+[$. Le lemme de Grönwall assure alors que

$$\|X(t)\| \leqslant \big(\|x_0\| + M(t_+ - t_0)\big)e^{M(t_+ - t_0)}$$

pour tout $t \in [t_0, t_+[$. Cette estimée empêche la sortie de tout compact, ce qui contredit le théorème 1.6. On en déduit donc que $\sup J = \sup I$, et par le même raisonnement que $\inf J = \inf I$. Comme I est ouvert, cela donne bien que $J = I$. □

Remarque 1.8. *Si la fonction f est* globalement lipschitzienne en sa seconde variable *sur $I \times \mathbb{R}^d$, c'est-à-dire s'il existe $L > 0$ tel que*

$$\forall t \in I, \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \qquad \|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant L\|x - y\|,$$

alors f vérifie clairement à la fois (3) et (4).

2 Équations scalaires

On dit que l'équation (1) est scalaire quand $d = 1$.

2.1 Équations scalaires linéaires

Vocabulaire. On dit que l'équation différentielle (1) est *linéaire* quand

$$f(t,x) = a(t)x + b(t).$$

Elle est dite *homogène* (ou sans second membre) quand $b(t) = 0$.
Elle est dite *autonome* (ou à coefficients constants) quand a et b ne dépendent pas de t.

Cas homogène. On considère donc ici l'équation différentielle

$$X' = a(t)X \tag{5}$$

où a est une fonction continue d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à cette équation, et donc pour tout $t_0 \in I$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution maximale X telle que $X(t_0) = x_0$. De plus cette solution est globale.

Pour $x_0 = 0$, la solution est donnée explicitement par $x(t) = 0$. On déduit alors de l'unicité que si $x_0 > 0$ (resp. $x_0 < 0$), alors pour tout $t \in I$ on a $X(t) > 0$ (resp. $X(t) < 0$).

On considère maintenant $x_0 > 0$ (le cas $x_0 < 0$ se traite de manière similaire). Comme $X(t) > 0$ pour tout $t \in I$, on peut diviser l'équation différentielle par X et on obtient alors

$$\frac{X'(t)}{X(t)} = a(t).$$

En intégrant entre t_0 et t on obtient

$$\ln(X(t)) = \ln(x_0) + \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds.$$

En passant ensuite à l'exponentielle on trouve

$$X(t) = x_0\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}. \tag{6}$$

En fixant $t_0 \in I$, on obtient finalement que les solutions de l'équation (5) sont les fonctions de la forme (6) avec $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque. En particulier l'ensemble des solutions de (5) est un espace vectoriel de dimension 1.

Cas non-homogène : Méthode de variation de la constante. On considère maintenant l'équation non-homogène

$$X' = a(t)X + b(t) \tag{7}$$

où le second membre $b : I \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée. Il est facile de vérifier que si on connaît une solution particulière X_p de cette équation, alors toutes les autres sont obtenues en ajoutant à cette solution particulière une solution de l'équation homogène (5). La résolution de l'équation (7) se réduit donc à trouver une solution particulière, puisqu'on a déjà vu comment résoudre l'équation homogène associée.

La *variation de la constante* est une méthode permettant de trouver une solution particulière en s'inspirant de la forme des solutions de l'équation homogène. Plus précisément, elle consiste à chercher une solution particulière sous la forme

$$X_p(t) = K(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}.$$

Dans cette expression, on rend "variable" la constante x_0 de (5). La question est maintenant d'identifier la fonction K pour que X_p vérifie (7). En injectant l'expression de X_p dans (7) on obtient

$$K'(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} + K(t)a(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} = a(t)K(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} + b(t),$$

et donc
$$K'(t) = b(t)\, e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,ds}.$$
Une intégration donne alors comme possibilité
$$K(t) = \int_{t_0}^t b(s)\, e^{-\int_{t_0}^s a(s')\,ds'},$$
ce qui conduit à la solution particulière
$$X_p(t) = \int_{t_0}^t b(s)\, e^{\int_s^t a(s')\,ds'}.$$
Finalement les solutions de l'équation (7) s'écrivent
$$X(t) = x_0\, e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} + \int_{t_0}^t b(s)\, e^{\int_s^t a(s')\,ds'} ds$$
où $x_0 \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Exemple. *Résoudre sur $I = \mathbb{R}$ l'équation $X' = 2tX + (t-1)e^{2t}$.*

2.2 Équations scalaires non-linéaires à variables séparables

On considère ici le cas où
$$f(t,x) = a(t)g(x).$$
Dans ce cas on peut appliquer la même stratégie que pour les équations linéaires homogènes, qui correspondent au cas particulier $g(x) = x$.

Supposons que g est localement lipschitzienne sur Ω et qu'il existe $x_1, x_2 \in \Omega$ tels que $g(x_1) = g(x_2) = 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x \in]x_1, x_2[$. On a alors clairement que les fonctions constantes égales à x_1 ou à x_2 sont solution de l'équation
$$X' = a(t)g(X).$$
Maintenant si on considère $x_0 \in]x_1, x_2[$, alors l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que la solution maximale X du problème de Cauchy (2) vérifie $X(t) \in]x_1, x_2[$ pour tout $t \in J$. Par conséquent, on a $g(X(t)) > 0$ pour tout $t \in J$ et on peut écrire
$$\frac{X'(t)}{g(X(t))} = a(t).$$
En intégrant entre t_0 et t on obtient
$$G(X(t)) = \int_{t_0}^t a(s)\,ds, \qquad \text{où} \qquad G(x) := \int_{x_0}^x \frac{dy}{g(y)}.$$
La fonction G est strictement croissante sur $]x_1, x_2[$ puisque $G' = 1/g$. De plus, comme g est localement lipschitzienne, il existe $L > 0$ tel que $g(x) \geqslant L(x - x_1)$ et $g(x) \geqslant L(x_2 - x)$ pour tout $x \in [x_1, x_2]$, et on en déduit que $\lim_{x\to x_1} G(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to x_2} G(x) = +\infty$. La fonction G est donc un C^1-difféomorphisme de $]x_1, x_2[$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $t \in J$
$$X(t) = G^{-1}\left(\int_{t_0}^t a(s)\,ds\right). \tag{8}$$
Si l'on sait calculer une primitive de a et de $1/g$, et que l'on sait inverser G, alors on obtient une formule explicite pour la solution maximale du problème de Cauchy avec donnée initiale $X(t_0) = x_0$. Cependant, la formule (8) permet également d'obtenir de précieuses informations sur les solutions lorsque l'on ne sait pas expliciter G^{-1}. En particulier on voit sur (8) que $X(t)$ est défini pour tout $t \in I$, et donc les solutions maximales sont globales. On voit également que si $a(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in I$ et que l'intégrale $\int_{t_0}^t a(s)ds$ diverge en $\sup I$ (resp. $\inf I$), alors $\lim_{t\to\sup I} X(t) = x_2$ (resp. $\lim_{t\to\inf I} X(t) = x_1$).

Il est à noter que cette méthode peut s'appliquer dans un cadre plus général que les hypothèses faites sur g ci-dessus.

Exemple. *Résoudre l'équation de Ricatti où $I = \Omega = \mathbb{R}$ et $f(t,x) = x^2$, et en déduire que la seule solution globale est la solution nulle.*

Exemple. *On considère l'équation différentielle $X'(t) = 2\sqrt{|X(t)|}$ sur $I \times \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Trouver toutes les solutions maximales du problème de Cauchy avec donnée initiale $X(0) = 0$ et vérifier qu'elles sont globales.*

On a vu que la formule (8) permettait d'obtenir des informations sur le comportement qualitatif des solutions. Ce comportement peut aussi être obtenu de manière moins calculatoire et plus visuelle via le champ de vecteur $x \mapsto g(x)$.

Gardons les même hypothèses sur g que plus haut et supposons que $a(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in I$. Pour $x_0 \in]x_1, x_2[$, on a déjà vu que $X(t) \in]x_1, x_2[$ pour tout $t \in J$ et donc X est strictement croissante puisque $X'(t) = g(X(t)) > 0$. De plus $X(t)$ est minoré par x_1 et majoré par x_2, donc la solution maximale est globale et admet des limites $\lim_{t \to \inf I} X(t) \in [x_1, x_0[$ et $\lim_{t \to \sup I} X(t) \in]x_0, x_2]$. Si l'intégrale $\int_{t_0}^t a(s)ds$ diverge en $\sup I$ (resp. $\inf I$), alors $\lim_{t \to \sup I} X(t) = x_2$ (resp. $\lim_{t \to \inf I} X(t) = x_1$). En effet, supposons par l'absurde que $\lim_{t \to \sup I} X(t) = \bar{x} < x_2$. Alors pour tout $t \in I$ on a $g(X(t)) \geqslant \underline{g} := \inf_{[x_0, \bar{x}]} g > 0$ et donc $X'(t) \geqslant \underline{g}a(t)$. En intégrant on obtient

$$X(t) \geqslant x_0 + \underline{g} \int_{t_0}^t a(s)ds \xrightarrow[t \to \sup I]{} +\infty$$

et donc une contradiction. On traite de la même manière le cas où l'intégrale $\int_{t_0}^t a(s)ds$ diverge en $\inf I$.

Tout comme pour la formule (8), ce principe d'étude qualitative peut s'appliquer dans un cadre plus général d'hypothèses sur a et g.

Exemples. *Étudier les équations suivantes sur $I = \Omega = \mathbb{R}$:*

1. $X' = \sin(X)$,
2. $X' = \sin(t)$,
3. $X' = \sin(t)\sin(X)$.

3 Systèmes linéaires

On considère maintenant des équations différentielles linéaires en dimension $d \geqslant 2$, c'est-à-dire des équations de la forme
$$X' = A(t)X + B(t) \tag{9}$$
où $A : I \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^d$ sont des fonctions continues. De telles équations sont parfois appelées systèmes différentiels linéaires.

3.1 Cas homogène

Comme dans le cas scalaire, on commence par s'intéresser au cas sans second membre
$$X' = A(t)X. \tag{10}$$
Fixons $t_0 \in I$. À nouveau le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$ on a l'existence d'une unique solution globale X vérifiant $X(t_0) = x_0$. En revanche, à la différence du cas scalaire, il n'existe pas en général de formule explicite pour cette solution. Néanmoins, si on se donne une base $(v_1, \cdots, v_d)$ de $\mathbb{R}^d$ (par exemple la base canonique) et que pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$ on note X_i la solution maximale de (10) telle que $X_i(t_0) = v_i$, alors on a par linéarité que toute solution X de (10) s'écrit
$$X(t) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i X_i(t)$$
où les α_i sont déterminés de manière unique par la décomposition $X(t_0) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i v_i$. On en déduit en particulier que l'ensemble des solutions de (10) est un espace vectoriel de dimension d. En effet on vient de voir que l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^d$ dans l'espace vectoriel des solutions par $(\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \mapsto \sum_{i=1}^{d} \alpha_i X_i$ est surjective, c'est donc un isomorphisme par le théorème du rang.

Systèmes homogènes à coefficients constants. S'il n'existe pas de formule explicite pour l'équation (10) en dimension $d \geqslant 2$ en général, il est possible de résoudre l'équation dans le cas autonome où $A(t)$ est une matrice constante A en utilisant l'exponentielle de matrice. Rappelons que pour $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ on note $\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^d}{d!}$. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, il existe une unique solution $X \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ à l'équation $X' = AX$ vérifiant $X(0) = x_0$, et celle-ci est donnée par
$$X(t) = e^{tA} x_0. \tag{11}$$
En diagonalisant ou en trigonalisant la matrice A, on peut donc avoir de précieux renseignements sur les solutions. Dans le cas $d = 2$ par exemple, on a les cas suivants :

- si A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ dans une base (v_1, v_2) avec $Av_1 = \lambda_1 v_1$ et $Av_2 = \lambda_2 v_2$, alors
  $X(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} v_2$.
- si A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ dans une base (v_1, v_2) avec $Av_1 = (\mu + i\omega)v_1$ et $Av_2 = (\mu - i\omega)v_2$, alors
  $X(t) = e^{\mu t}\cos(\omega t)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + e^{\mu t}\sin(\omega t)(i\alpha_1 v_1 - i\alpha_2 v_2)$.
  Notons que l'on peut choisir $v_2 = \bar{v}_1$, auquel cas $\alpha_2 = \bar{\alpha}_1$ et on peut alors écrire
  $X(t) = 2\, e^{\mu t}\cos(\omega t)\,\mathrm{Re}(\alpha_1 v_1) - 2\, e^{\mu t}\sin(\omega t)\,\mathrm{Im}(\alpha_1 v_1)$.
- si A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$ dans une base (v_1, v_2) avec $Av_1 = \lambda v_1$ et $Av_2 = v_1 + \lambda v_2$, alors
  $X(t) = e^{\lambda t}((\alpha_1 + t\alpha_2)v_1 + \alpha_2 v_2)$.

3.2 Cas non-homogène : Méthode de la variation des constantes

Si l'on connaît d solutions $X_1, \cdots, X_d$ de (10) linéairement indépendantes, on peut résoudre le système différentiel inhomogène (9) par la méthode de la *variation des constantes*.

On sait que la solution générale de (10) s'écrit $\sum_i \alpha_i X_i$ où les α_i sont des constantes réelles. La méthode consiste alors à chercher des solutions de (9) sous la forme
$$X(t) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i(t) X_i(t)$$

où les $\alpha_i : J \to \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe C^1. Par dérivation on obtient que X est solution de (10) si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{d} \alpha_i'(t) X_i(t) + \sum_{i=1}^{d} \alpha_i(t) X_i'(t) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i(t) A(t) X_i(t) + B(t),$$

et comme $X_i' = A(t) X_i$ on obtient

$$\sum_{i=1}^{d} \alpha_i'(t) X_i(t) = B(t).$$

Les X_i étant indépendants, ceci apparaît comme un système de Cramer dont les inconnues sont les $\alpha_i'(t)$. Par résolution puis intégration on trouve les α_i.

Remarque 3.1. *Comme nous l'avons vu dans la section 2.1, dans le cas scalaire* ($d = 1$) *il est facile de résoudre l'équation différentielle linéaire homogène* $X' = a(t)\,X$*, où* $a : I \to \mathbb{R}$ *est continue.*

Pour $d \geqslant 2$ *en revanche, il n'existe pas de méthode générale pour résoudre l'équation homogène* (10) *si la fonction* $A : I \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *n'est pas constante. Il est en particulier important de noter que les solutions ne sont pas données par la formule* $e^{\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds} x_0$ *comme on pourrait le penser en voulant trop rapidement généraliser* (6) *et/ou* (11)*. Ceci tient au fait que* $e^A e^B$ *n'est pas égal à* e^{A+B} *si* A *et* B *ne commutent pas.*

4 Équations linéaires scalaires du second ordre

On s'intéresse ici à des équations scalaires du second ordre, c'est-à-dire faisant intervenir la dérivée seconde de l'inconnue. Plus précisément, on considère l'équation différentielle linéaire scalaire

$$x'' + a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t), \tag{12}$$

où a, b et c sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

4.1 Système d'ordre 1 en dimension 2

L'équation (12) peut se ramener à une équation différentielle du premier ordre. En effet il est équivalent de dire qu'une fonction x est solution de (12) et que $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ est solution de

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

On déduit donc du résultat sur les systèmes linéaires que pour tout $t_0 \in I$ et pour tout couple $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution x de (12) définie sur I tout entier, telle que $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = v_0$.

Équation homogène à coefficients constants. L'étude des systèmes linéaires homogènes à coefficients constants nous permet de résoudre l'équation (12) dans le cas où a et b sont des constantes et $c = 0$. L'expression de ces solution dépend des valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$. Pour obtenir ces valeurs propres, on calcule

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ b & \lambda + a \end{vmatrix} = \lambda^2 + a\lambda + b.$$

On déduit alors du cas des systèmes homogènes de dimension 2 à coefficients constants que :

- ◇ si $a^2 - 4c > 0$ alors A a deux valeurs propres réelles λ_1, λ_2 et
  $x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$ avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
- ◇ si $a^2 - 4c < 0$ alors A a deux valeurs propres complexes conjuguées $\mu \pm i\omega$ et
  $x(t) = e^{\mu t}\big(\alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \sin(\omega t)\big)$ avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
- ◇ si $a^2 - 4c = 0$ alors A admet une valeur propre double $\lambda \in \mathbb{R}$ et
  $x(t) = e^{\lambda t}(\alpha_1 + t\alpha_2)$ avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Équation non-homogène : méthode de variation des constantes. Supposons connues deux solutions linéairement indépendantes x_1 et x_2 de

$$x'' + a(t)\,x' + b(t)\,x = 0. \tag{13}$$

La méthode de la variation des constantes décrite dans le cas des systèmes nous conduit à chercher des solutions de (12) sous la forme $x(t) = \alpha_1(t)x_1(t) + \alpha_2(t)x_2(t)$ où α_1 et α_2 sont solutions de

$$\left\{ \begin{array}{lcccc} \alpha_1' x_1 & + & \alpha_2' x_2 & = & 0 \\ \alpha_1' x_1' & + & \alpha_2' x_2' & = & c(t) \end{array} \right. .$$

4.2 Wronskien

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, il n'existe pas de méthode générale pour trouver deux solutions linéairement indépendantes de (13). Par contre si on en connaît une qui ne s'annule pas sur I, alors on sait en trouver une autre (linéairement indépendante).

Pour cela on définit le *Wronskien* d'un couple de solutions (x_1, x_2) de l'équation (13) par

$$W(t) = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t).$$

On montre alors facilement que $W' + a(t)W = 0$ et donc

$$W(t) = W(t_0) \exp\Big(- \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds \Big).$$

Si on connaît une solution x_1 qui ne s'annule pas sur I, on peut alors trouver une autre solution x_2 en résolvant l'équation scalaire du premier ordre

$$x_2' - \frac{x_1'}{x_1}\, x_2 = \frac{W(t_0)}{x_1(t)} \exp\Big(- \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds \Big).$$

On remarque par ailleurs que le Wronskien est le déterminant du système en α_1', α_2' de la variation des constantes. Ce système est donc bien inversible, car le Wronskien est soit identiquement nul (si x_1 et x_2 son colinéaires), soit toujours non-nul (si x_1 et x_2 sont linéairement indépendantes). De plus on peut facilement calculer son inverse à l'aide du Wronskien puisqu'on est en dimension 2.

5 Systèmes de dimension 2 : portrait de phase

On s'intéresse ici uniquement à des équations différentielles homogènes et autonomes en dimension $d = 2$, c'est-à-dire des équations de la forme $X' = f(X)$ avec $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

5.1 Cas linéaire

Dans le cas où f est linéaire, c'est-à-dire que l'équation différentielle s'écrit $X' = AX$ avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la fonction constante égale à zéro est toujours solution et le portrait de phase au voisinage de zéro se déduit de l'étude des valeurs propres de A.

`Dessins`

5.2 Un exemple non-linéaire : l'équation de Lotka-Volterra

Le système proies-prédateurs de Lotka-Volterra est l'équation suivante

$$\begin{cases} x' = ax - bxy, \\ y' = -cy + dxy, \end{cases} \tag{14}$$

où a, b, c et d sont des constantes strictement positives. Ce système a été introduit pour modéliser l'évolution des effectifs de population de proies (sardines) et de prédateurs (requins). La quantité $x(t)$ représente le nombre de proies au temps t et $y(t)$ le nombre de prédateurs. Dans ce modèle simplifié, les proies naissent avec un taux a et meurent quand elles rencontrent un prédateur avec un taux b. Les prédateurs meurent avec un taux c et naissent proportionnellement au nombre de proies disponibles avec un taux d.

La fonction $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ax - bxy \\ -cy + dxy \end{pmatrix}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique donc et l'équation (14) admet une unique solution maximale pour toute donnée initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Si $x_0 = 0$ et $y_0 \neq 0$, on voit facilement que la solution est donnée par $x(t) = 0$ et $y(t) = y_0 e^{-ct}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De même si $x_0 \neq 0$ et $y_0 = 0$ on a $x(t) = x_0 e^{at}$ et $y(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On en déduit par l'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz que si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On dit aussi que le cadrant positif

$$Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0,\ y > 0\right\}$$

est laissé invariant par l'équation (14). Dans cet ensemble, la fonction f ne s'annule qu'en $(x_e, y_e) = (c/d, a/b)$ et la seule solution constante de l'équation (14) dans Q est donc donnée par ce point.

Pour tout $(x, y) \in Q$ on pose

$$H(x, y) = -c \ln x + dx - a \ln y + by.$$

On vérifie facilement que cette fonction est strictement convexe en calculant sa matrice hessienne, et qu'elle atteint son minimum global en l'unique point critique (x_e, y_e). On vérifie également que si $t \mapsto (x(t), y(t)) \in Q$ est une solution de (14), alors la fonction $t \mapsto H(x(t), y(t))$ est constante. On en déduit en particulier que les trajectoires strictement positives du système sont bornées. En effet, on peut écrire $H(x, y) = L_{c,d}(x) + L_{a,b}(y)$ avec $L_{c,d}(x) \to +\infty$ quand $x \to 0$ et quand $x \to +\infty$ (idem pour $L_{a,b}(y)$). On a donc que $L_{c,d}(x(t)) \leqslant H(x_0, y_0) - \min L_{a,b}$ et cela impose à $x(t)$ d'être bornée (on raisonne de la même manière pour $y(t)$). Le théorème de sortie de tout compact implique alors que les solutions maximales sont globales. On va maintenant montrer grâce à la fonction H que les solutions sont périodiques.

Soient $H_0 > H(x_e, y_e) = \min H$ et (x_0, y_0) tel que $H(x_0, y_0) = H_0$ avec $y_0 = y_e$. On a $H(x(t), y(t)) = H_0$ pour tout $t \geqslant 0$ et on définit alors

$$\mathcal{N}_0 = H^{-1}(H_0) = \{(x, y) \in Q,\ H(x, y) = H_0\}.$$

Par stricte convexité de H, on a que pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$ l'application $r \mapsto H(x_e + r\cos\theta, y_e + r\sin\theta)$ est strictement convexe et comme elle atteint son minimum en 0 on en déduit qu'elle est strictement croissante sur son intervalle de définition $[0, \ell_\theta[$, avec $\ell_\theta = +\infty$ seulement quand $\theta \in [0, \pi/2]$. De plus elle tend vers $+\infty$ quand $r \to \ell_\theta$. Par conséquent il existe un unique $r > 0$ tel que $H(x_e + r\cos\theta, y_e + r\sin\theta) = H_0$, c'est-à-dire un unique $r > 0$ tel que $(x_e + r\cos\theta, y_e + r\sin\theta) \in \mathcal{N}_0$. On note $R(\theta)$ ce $r > 0$. On définit ainsi une fonction 2π-périodique $R : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ telle que $(x, y) \in \mathcal{N}_0$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) = (x_e + R(\theta)\cos\theta, y_e + R(\theta)\sin\theta)$.

On définit maintenant pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ tel que $(x_e + r\cos\theta, y_e + r\sin\theta) \in Q$

$$F(\theta, r) = H(x_e + r\cos\theta, y_e + r\sin\theta) - H_0,$$

de sorte que

$$(x_e + r\cos\theta, y_e + r\sin\theta) \in \mathcal{N}_0 \quad\Longleftrightarrow\quad F(\theta, r) = 0$$

et donc

$$F(\theta, r) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad r = R(\theta).$$

Si on peut appliquer le théorème des fonctions implicites, on obtiendra que la fonction R est de classe C^1. On calcule alors

$$\frac{\partial F}{\partial r}(\theta, r) = -c\frac{\cos\theta}{x_e + r\cos\theta} + d\cos\theta - a\frac{\sin\theta}{y_e + r\sin\theta} + b\sin\theta = \frac{d\,r\cos^2\theta}{x_e + r\cos\theta} + \frac{b\,r\sin^2\theta}{y_e + r\sin\theta}.$$

Pour (θ, r) tel que $F(\theta, r) = 0$ on a $(x_e + r\cos\theta, y_e + r\sin\theta) \in \mathcal{N}_0 \subset Q$ donc $\frac{\partial F}{\partial r}(\theta, r) > 0$. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites et R est de classe C^1.

Maintenant, comme $(x(t), y(t)) \in \mathcal{N}_0$ pour tout $t \geqslant 0$, il existe une unique fonction $\theta : [0, +\infty[\to [0, 2\pi[$ telle que $x(t) = x_e + R(\theta(t))\cos\theta(t)$ et $y(t) = y_e + R(\theta(t))\sin(\theta(t))$. On pose alors $Q^* := Q\backslash\{(x_e + r, y_e),\ r \geqslant 0\}$ et on définit la fonction $A : Q^* \to]0, 2\pi[$ par

$$A(x, y) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y - y_e}{x - x_e}\right) & \text{si } x > x_e \text{ et } y > y_e, \\[2ex] \pi + \arctan\left(\dfrac{y - y_e}{x - x_e}\right) & \text{si } x < x_e, \\[2ex] \operatorname{arccot}\left(\dfrac{x - x_e}{y - y_e}\right) & \text{si } y > y_e, \\[2ex] \pi + \operatorname{arccot}\left(\dfrac{x - x_e}{y - y_e}\right) & \text{si } y < y_e. \end{cases}$$

Cette fonction angle est de classe C^1 et pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$ et tout $r > 0$ on a $A(x_e + r\cos\theta, y_e + r\sin\theta) = \theta$, de sorte que quand $\theta(t) \in]0, 2\pi[$, c'est-à-dire quand $(x(t), y(t)) \in Q^*$, on a $\theta(t) = A(x(t), y(t))$. Comme en $t = 0$ on a $x'(0) = 0$ et $y'(0) > 0$, on en déduit que $\theta'(0) > 0$ et donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\theta(t) \in]0, 2\pi[$ pour tout $t \in]0, \varepsilon[$. On définit alors

$$T = \sup\left\{t > 0,\ \forall s \in]0, t[,\ \theta(s) \in]0, 2\pi[\right\}.$$

L'ensemble de droite est non vide puisqu'il contient ε et on a donc $T \in [\epsilon, +\infty]$. Sur l'intervalle de temps $]0, T[$ on a finalement que θ est de classe C^1 comme composée de fonctions de classe C^1, et on peut donc écrire pour tout $t \in]0, T[$

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \theta'(t) \begin{pmatrix} R'(\theta(t))\cos(\theta(t)) - r(\theta(t))\sin(\theta(t)) \\ R'(\theta(t))\sin(\theta(t)) + r(\theta(t))\cos(\theta(t)) \end{pmatrix}.$$

Comme $\left\|\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}\right\| = \left\|f\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\right\| \geqslant c_1 > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on en déduit que $|\theta'(t)| \geqslant c_2 > 0$ pour tout $t \in]0, T[$. Comme en $t = 0$ on a $\theta'(0) > 0$, on en déduit que $\theta'(t) \geqslant c_2$ puis $\theta(t) \geqslant c_2\, t$. Cela implique que $T \leqslant 2\pi/c_2 < +\infty$ et que $\lim_{t\to T}\theta(t) = 2\pi$. Par conséquent $(x(T), y(T)) = (x_0, y_0)$ et l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz assure alors que la solution $(x(t), y(t))$ est périodique de période T. Comme on a également montré que $(x(t), y(t))$ parcourt toute la courbe $\mathcal{N}_0$, on en déduit que toutes les solutions sont périodiques. De plus la période ne dépend que de la ligne de niveau $\mathcal{N}_0$ sur laquelle vit la solution.

En intégrant

$$\frac{x'}{x} = a + by \qquad \text{et} \qquad \frac{y'}{y} = -c + dx$$

sur $[0, T]$ on obtient que

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \frac{c}{d} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt = \frac{a}{b}.$$

À partir de ces expressions, on peut donner une interprétation de l'influence de la pêche sur les deux populations de proies et de prédateurs.