Université de Tours
M2 Agrégation

P. Gabriel

Compléments d'Analyse

Table des matières

1 Topologie des espaces métriques et des evn

1.1 Espaces métriques

Soit X un ensemble.

Définition 1.1 (Distance)**.** *Une fonction* $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ *est appelée* distance *sur* X *si elle vérifie les conditions suivantes*

(i) $\forall (x,y) \in X^2, \quad d(x,y) = d(y,x)$,

(ii) $\forall (x,y,z) \in X^3, \quad d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$,

(iii) $\forall (x,y) \in X^2, \quad d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

Le couple (X,d) *est alors appelé* espace métrique.

Pour tous x dans un espace métrique (X,d) et $r > 0$, on note

$$B_d(x,r) := \{y \in X,\ d(x,y) < r\}$$

la boule (ouverte) de centre x et de rayon r.

Définition 1.2 (Distances équivalentes)**.** *Deux distances* d_1 *et* d_2 *sur un espace* X *sont dites* équivalentes *si*

$$\exists c, C > 0,\ \forall x, y \in X, \qquad c\, d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant C\, d_1(x,y).$$

Elles sont dites topologiquement équivalentes *si l'identité est un homéomorphisme entre* (X,d_1) *et* (X,d_2)*, ou en d'autres termes si*

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0,\ B_{d_1}(x,\eta) \subset B_{d_2}(x,\epsilon)$$

et

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0,\ B_{d_2}(x,\eta) \subset B_{d_1}(x,\epsilon).$$

Deux distances équivalentes sont topologiquement équivalentes. La réciproque est fausse, prendre par exemple sur $X = \mathbb{R}$ les distances $d_1(x,y) = |x-y|$ et $d_2(x,y) = \min\{1, |x-y|\}$.

Deux distances topologiquement équivalentes définissent la même topologie (mêmes ensembles ouverts, fermés, compacts, mêmes suites convergentes, de Cauchy, mêmes applications continues...).

Théorème 1.3 (Banach, Picard)**.** *Soit* (X,d) *un espace métrique complet et soit* $f : X \to X$*. On suppose que* f *est une contraction, i.e.*

$$\exists \theta \in]0,1[,\ \forall (x,y) \in X^2,\ d(f(x), f(y)) \leqslant \theta d(x,y).$$

Alors il existe un unique point fixe $x^* \in X$ *pour* f*, i.e. un unique* $x^* \in X$ *tel que* $f(x^*) = x^*$.

Démonstration. Soit $x_0 \in X$ et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie à partir de x_0 par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Par itération on obtient que $d(x_{n+1}, x_n) \leqslant \theta^n d(x_1, x_0)$. Pour tous $m > n$ on a alors

$$d(x_m, x_n) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leqslant d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{m-1} \theta^k \leqslant \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_1, x_0).$$

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et, par complétude, elle converge vers un élément $x^* \in X$. Puisque f est continue on a $f(x^*) = x^*$ en passant à la limite dans $x_{n+1} = f(x_n)$. L'unicité est une conséquence directe de l'hypothèse de contraction. □

1.2 Espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.4 (Norme)**.** *Une fonction $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ est appelée* norme *sur E si elle vérifie les conditions suivantes*

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E, \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|,$

(ii) $\forall (x,y) \in E^2, \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|,$

(iii) $\|x\| = 0 \implies x = 0.$

Le couple $(E, \|\cdot\|)$ est alors appelé espace vectoriel normé *(e.v.n.).*

Proposition 1.5. *Un e.v.n. est un espace métrique pour la distance*

$$d(x,y) = \|x - y\|.$$

Définition 1.6 (Normes équivalentes)**.** *Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E sont dites* équivalentes *si*

$$\exists c, C > 0,\ \forall x \in E, \qquad c\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1.$$

Deux normes équivalentes définissent des distances équivalentes. On en déduit en particulier que la distance $d_2(x,y) = \min\{1, |x-y|\}$ sur $\mathbb{R}$ ne découle pas d'une norme. En effet on a vu qu'elle n'était pas équivalente à $d_1(x,y) = |x-y|$ et on sait que dans $\mathbb{R}$ toutes les normes sont équivalentes (voir plus bas).

Définition 1.7 (Espace de Banach)**.** *On appelle* espace de Banach *un espace vectoriel normé complet.*

Exercice. Un espace vectoriel normé est un espace de Banach si et seulement si dans cet espace toute série normalement convergente est convergente.

Cas de la dimension finie.

Théorème 1.8. *Si E est de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Contre-exemple en dimension infinie. Dans $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$, les normes $\|u\|_1 = \int_a^b |u(t)|\, dt$ et $\|u\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |u(t)|$ ne sont pas équivalentes.

Théorème 1.9. *Si E est de dimension finie, alors les compacts de E sont les ensembles fermés et bornés.*

Contre-exemple en dimension infinie. Dans $E = L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ muni de sa norme usuelle, la boule unité fermée n'est pas compacte.

On prouve en même temps les théorèmes 1.8 et 1.9.

Preuve des théorèmes 1.8 et 1.9. Première étape : preuve du théorème 1.9 pour la norme

$$N_\infty(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i|$$

où $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ avec $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. On sait que les compacts sont toujours fermés et bornés. Il reste donc à montrer la réciproque, à savoir que les fermés bornés sont compacts. On utilise pour cela le fait que pour tout $R > 0$ le pavé $[-R, R]^n$ est compact dans $\mathbb{R}^n$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et que l'application

$$\Phi : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \end{array}$$

est un homéomorphisme (en fait une isométrie) quand E est muni de la norme N_∞ et $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Deuxième étape : preuve du théorème 1.8. Toute norme sur E est équivalente à N_∞. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E. On a tout d'abord par inégalité triangulaire que pour tout $x \in E$

$$\|x\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, \|e_i\| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\| \Big) N_\infty(x).$$

Pour l'autre inégalité, on utilise que la fonction $\mathrm{Id} : (E, N_\infty) \to (E, \|\cdot\|)$ est continue grâce à l'inégalité ci-dessus. Comme d'autre part la sphère unité pour la norme N_∞, notée $\mathbb{S}_\infty$, est compacte d'après la première étape, on en déduit que $\mathrm{Id} : (\mathbb{S}_\infty, N_\infty) \to (E, \|\cdot\|)$ est bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe un $x_0 \in \mathbb{S}_\infty$ tel que $\|y\| \geqslant \|x_0\|$ pour tout $y \in E$ tel que $N_\infty(y) = 1$. On en déduit facilement que

$$\|x\| \geqslant \|x_0\| N_\infty(x)$$

pour tout $x \in E$. Ceci termine la démonstration puisque $N_\infty(x_0) = 1 \implies x_0 \neq 0 \implies \|x_0\| > 0$. □

Théorème 1.10 (Théorème de Riesz)**.** *La boule unité fermée d'un e.v.n. est compacte si et seulement si l'espace vectoriel est de dimension finie.*

Proposition 1.11. *Tout e.v.n. de dimension finie sur $\mathbb{K}$ est complet.*

Contre-exemple en dimension infinie. L'espace $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas complet.

1.3 Applications linéaires continues et dual topologique

Proposition 1.12. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n. et soit $L : E \to F$ linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) L est continue sur E ;

(ii) L est continue en 0 ;

(iii) $\exists C > 0,\ \forall x \in E,\ \|L(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$ (on dit aussi que L est bornée).

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires vérifiant ces propriétés.

⚠ $\mathcal{L}(E, F)$ dépend du choix des normes ! Par exemple si on considère $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, $F = \mathbb{R}$ et $L : f \mapsto f(0)$, alors $L \in \mathcal{L}(E, F)$ si on munit E de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$ mais pas si E est muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| \, dx$.

Proposition 1.13. *Soient E et F deux e.v.n. avec E de dimension finie. Alors toute application linéaire de E dans F est continue.*

Proposition 1.14. *Si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n. alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un e.v.n. pour la norme*

$$\begin{aligned} |||L|||_{\mathcal{L}(E,F)} &:= \min \big\{ C > 0,\ \forall x \in E,\ \|L(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E \big\} \\ &= \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E, \|x\| \leqslant 1} \|L(x)\|_F = \sup_{x \in E, \|x\| = 1} \|L(x)\|_F. \end{aligned}$$

Exercice. On considère $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ que l'on munit de la norme $\|u\|_1 = \int_0^1 |u(t)| \, dt$. Soit $L : E \to E$ l'application linéaire définie par $L(u)(t) = tu(t)$. Montrer que $|||L||| = 1$ mais qu'il n'existe pas de $u \neq 0$ tel que $\|L(u)\| = \|u\|$.

Proposition 1.15. *Soient E, F et G trois e.v.n., $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\Psi \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $\Psi \circ \Phi \in \mathcal{L}(E, G)$ et $|||\Psi \circ \Phi|||_{\mathcal{L}(E,G)} \leqslant |||\Phi|||_{\mathcal{L}(E,F)} |||\Psi|||_{\mathcal{L}(F,G)}$.*

Définition 1.16 (Forme linéaire)**.** *Une* forme linéaire *est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.*

Définition 1.17 (Hyperplan)**.** *Un* hyperplan *de E est un sous-espace vectoriel H de codimension 1, i.e. tel que $\exists a \in E\backslash\{0\},\ E = H \oplus \mathbb{K}a$.*

Proposition 1.18. *Les hyperplans d'un espace vectoriel sont les noyaux des formes linéaires non nulles. Si E est un e.v.n. et $H = \mathrm{Ker}(L)$, alors L est continue si et seulement si H est fermé.*

Démonstration.

- Soit $L : E \to \mathbb{K}$ linéaire non nulle et soit $a \in E,\ L(a) \neq 0$. On note $H = \mathrm{Ker}(L) = L^{-1}(\{0\})$ le noyau de L. On a alors $E = H \oplus \mathbb{K}a$. En effet si $x \in E$ alors $h = x - \frac{L(x)}{L(a)}a$ est bien dans H ($L(h) = 0$) et on a donc $x = h + \lambda a$ avec $\lambda = \frac{L(x)}{L(a)},\ h \in H$ et $\lambda a \in \mathbb{K}a$. D'autre part si $h = \lambda a \in H \cap \mathbb{K}a$, alors $L(h) = \lambda L(a) = 0$ et donc $\lambda = 0$ et $h = 0$. H est bien un hyperplan.
  Réciproquement si H est un hyperplan, il existe $a \neq 0$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}a$. Pour tout $x \in E$ il existe un unique $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = h + \lambda a$. On pose $L(x) = \lambda$. On a alors bien que L est une forme linéaire non nulle et que $H = \mathrm{Ker}(L)$.
- Si L est continue alors l'image réciproque des fermés est fermée, donc $H = L^{-1}(\{0\})$ est fermé.
  Réciproquement supposons que $H = \mathrm{Ker}(L)$ est fermé. Soit $\mathbb{K}a$ une droite supplémentaire. Si L n'est pas bornée alors il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\|x_n\| = 1$ et $|L(x_n)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Posons $h_n = a - \frac{L(a)}{L(x_n)}x_n$. On a $h_n \to a$ et $h_n \in H$ ($L(h_n) = 0$). Comme $a \notin H$, c'est une contradiction avec le fait que H est fermé. Donc L est bornée et donc continue.

□

Définition 1.19 (Dual topologique)**.** *On appelle* dual topologique *d'un e.v.n. E l'e.v.n. $E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.*

Proposition 1.20. *Si E est un e.v.n. et F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace de Banach pour la norme des applications linéaires continues.*

Corollaire 1.21. *Si E est un e.v.n. alors E' est un Banach.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E,F)$. On va montrer que (f_n) converge dans E en trois étapes : identifier la limite f ; vérifier que f appartient bien à $\mathcal{L}(E,F)$; montrer que f_n converge vers f pour la norme de $\mathcal{L}(E,F)$.

- Pour tout $x \in E$ on a $\|f_n(x) - f_m(x)\|_F \leqslant |||f_n - f_m|||_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|_E$. Donc $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F. Elle converge donc vers une limite que l'on note $f(x)$.
- Pour tout $x \in E,\ y \in E,\ \lambda \in \mathbb{K}$ on a $f_n(x + \lambda y) = \lambda f_n(x) + f_n(y)$ donc $\lim_{n\to\infty} f_n(\lambda x + y) = \lambda \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$. Donc f est bien linéaire.
  Soit maintenant $\epsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $|||f_n - f_m||| < \epsilon$ pour tous $n,m \geqslant N$. On a alors $\forall x \in E,\ \forall n,m \geqslant N,\ \|f_n(x) - f_m(x)\| < \epsilon\|x\|$. On garde n fixé et on fait tendre m vers l'infini pour obtenir $\|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \epsilon\|x\|$. Donc f est continue avec $|||f||| \leqslant \epsilon + |||f_n|||$.
- On a en fait aussi obtenu que $|||f_n - f||| \leqslant \epsilon$ et donc $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}(E,F)$.

□

1.4 Espace des fonctions continues bornées

Soient (X,d) un espace métrique et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{C}_b(X,F)$ des fonctions continues bornées de X dans F. C'est un espace de Banach (exercice : le démontrer) pour la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_F.$$

On rappelle qu'une fonction $f : X \to F$ est dite continue en un point $x \in X$ si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in X,\ d(x,y) < \eta \implies \|f(x) - f(y)\|_F < \epsilon,$$

et qu'elle est dite continue sur X si elle est continue en tout point $x \in X$.

Proposition 1.22. *Si (X,d) est compact, alors $\mathcal{C}_b(X,F)=\mathcal{C}(X,F)$ et pour toute fonction $f\in\mathcal{C}(X,F)$ on a $\|f\|_\infty=\max_{x\in X}\|f(x)\|_F$.*

Définition 1.23 (Continuité uniforme)**.** *Une fonction $f:X\to F$ est dite* uniformément continue *si*

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall(x,y)\in X^2,\ d(x,y)<\eta \implies \|f(x)-f(y)\|_F<\epsilon.$$

Théorème 1.24 (Heine)**.** *Si (X,d) est compact, alors toute fonction $f\in\mathcal{C}(X,F)$ est uniformément continue.*

Démonstration séquentielle (Bolzano-Weierstrass). On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une fonction $f:X\to F$ continue mais non uniformément continue sur X compact. Il existe alors $\epsilon>0$ tel que pour tout $\eta>0$ l'implication $d(x,y)<\eta \implies \|f(x)-f(y)\|_F<\epsilon$ soit fausse pour certains x et y. En considérant $\eta=1/n$ on peut donc construire deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telles que

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad d(x_n,y_n)<\frac{1}{n}\quad\text{et}\quad \|f(x_n)-f(y_n)\|_F\geqslant\epsilon.$$

L'ensemble X étant compact, on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $\ell\in X$. La relation $d(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$ assure que la suite extraite $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ. Comme f est continue, il en résulte que $\|f(x_{\varphi(n)})-f(y_{\varphi(n)})\|\to 0$, ce qui contredit le fait que $\|f(x_{\varphi(n)})-f(y_{\varphi(n)})\|\geqslant\epsilon$ pour tout n. □

Démonstration par recouvrement (Borel-Lebesgue). Soit $\epsilon>0$. Pour tout $x\in X$ il existe, par continuité de f, un $\eta_x>0$ tel que

$$\forall y\in X,\quad d(x,y)<\eta_x \quad\implies\quad \|f(x)-f(y)\|<\epsilon/2.$$

L'union $\bigcup_{x\in X}B(x,\eta_x/2)$ est un recouvrement par des ouverts de X qui est compact. Il existe donc un nombre fini de boules $B(x_i,\eta_{x_i}/2), 1\leqslant i\leqslant N$ tel que $X\subset\bigcup_{i=1}^N B(x_i,\eta_{x_i}/2)$. Posons $\eta=\min_{1\leqslant i\leqslant N}\eta_{x_i}/2$. Si $x,y\in X$ sont tels que $d(x,y)<\eta$, on peut alors trouver un i tel que $x\in B(x_i,\eta_{x_i}/2)$, de telle sorte que

$$d(y,x_i)\leqslant d(y,x)+d(x,x_i)<\eta+\eta_{x_i}/2\leqslant\eta_{x_i}.$$

On a donc

$$\|f(x)-f(y)\|\leqslant\|f(x)-f(x_i)\|+\|f(x_i)-f(y)\|<\epsilon/2+\epsilon/2=\epsilon.$$

□

Théorème 1.25 (Prolongement des fonctions uniformément continues)**.** *Soit A une partie dense de X et soit $f:A\to F$ une fonction uniformément continue. Alors il existe une unique fonction $\tilde{f}:X\to F$ continue qui prolonge f. De plus ce prolongement est uniformément continu.*

Démonstration. Unicité. Soient f_1 et f_2 deux prolongements continus de f. Soient $x\in X$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset A$ telle que $x_n\to x$. On a pour tout n, $f_1(x_n)=f_2(x_n)$ donc en passant à la limite $f_1(x)=f_2(x)$.
Existence. Soient $x\in X$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset A$ telle que $x_n\to x$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X. Comme f est uniformément continue, on a aussi $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans F qui est complet. Donc $f(x_n)$ converge vers une limite ℓ qui est indépendante du choix de la suite (x_n). On pose alors $\tilde{f}(x)=\ell$. En passant à la limite dans la définition de l'uniforme continuité de f on obtient l'uniforme continuité de $\tilde{f}$. □

Définition 1.26 (Équicontinuité)**.** *Une famille $\mathcal{F}\subset\mathcal{C}(X,F)$ est dite* équicontinue *en un point $x\in X$ si*

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall f\in\mathcal{F},\ \forall y\in X,\ d(x,y)<\eta \implies \|f(x)-f(y)\|_F<\epsilon.$$

La famille $\mathcal{F}$ est dite équicontinue sur X si elle est équicontinue en tout point $x\in X$.

Définition 1.27 (Équicontinuité uniforme)**.** *Une famille $\mathcal{F}\subset\mathcal{C}(X,F)$ est dite* uniformément équicontinue *si*

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall f\in\mathcal{F},\ \forall(x,y)\in X,\ d(x,y)<\eta \implies \|f(x)-f(y)\|_F<\epsilon.$$

Lemme 1.28. *Si (X,d) est compact, alors toute famille équicontinue sur X est uniformément équicontinue.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de l'équicontinuité, pour chaque $x \in X$, il existe $\eta_x > 0$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{F},\ \forall y \in X,\ d(x,y) < \eta_x \implies \|f(x) - f(y)\|_F < \frac{\epsilon}{2}.$$

Par compacité de X, on peut trouver un nombre fini de points $x_1, \cdots, x_N$ tels que

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_d(x_i, \eta_{x_i}/2).$$

Posons alors $\eta = \min_i \eta_{x_i}/2$. Pour tout couple (x,y) tel que $d(x,y) < \eta$, on peut trouver un indice i tel que x et y soient dans $B_d(x_i, \eta_{x_i})$. On a alors

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \|f(x) - f(x_i)\|_F + \|f(x_i) - f(y)\|_F < \epsilon.$$

□

Lemme 1.29. *Supposons (X,d) compact. Soit $\mathcal{F}$ une partie uniformément équicontinue de $\mathcal{C}(X,F)$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}$. Alors la suite (f_n) converge simplement si et seulement si elle converge uniformément.*

Démonstration. On suppose que (f_n) converge simplement vers une limite f. Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse d'équicontinuité uniforme

$$\exists \eta > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall (x,y) \in X^2,\ d(x,y) < \eta \implies \|f_n(x) - f_n(y)\|_F \leqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

Par passage à la limite $n \to \infty$, on constate que l'inégalité ci-dessus est aussi vérifiée par f (en particulier, f est donc uniformément continue). On recouvre ensuite le compact X par une famille finie de boules $B_d(x_i, \eta)_{1 \leqslant i \leqslant N_\epsilon}$ et on a alors pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|f_n(x) - f(x)\|_F &\leqslant \|f_n(x) - f_n(x_i)\|_F + \|f_n(x_i) - f(x_i)\|_F + \|f(x_i) - f(x)\|_F \\ &\leqslant \frac{2\epsilon}{3} + \max_{1 \leqslant i \leqslant N_\epsilon} \|f_n(x_i) - f(x_i)\|_F.\end{aligned}$$

En vertu de l'hypothèse de convergence simple, il existe n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant N_\epsilon} \|f_n(x_i) - f(x_i)\|_F < \frac{\epsilon}{3},$$

et la preuve est complète. □

Lemme 1.30. *Tout espace métrique compact est séparable.*

Démonstration. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, le compact (X,d) peut être recouvert par un nombre fini N_p de boules $B_d(x_i^p, 2^{-p})$. L'ensemble $\{x_i^p,\ p \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant i \leqslant N_p\}$ est alors dénombrable et dense dans X. □

Théorème 1.31 (Arzelà, Ascoli)**.** *Supposons (X,d) compact. Une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(X,F)$ est relativement compacte si et seulement si, pour tout $x \in X$,*

(i) $\mathcal{F}$ est équicontinue en x,

(ii) l'ensemble $\mathcal{F}(x) = \{f(x),\ f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact.

Démonstration. On montre que *(i)* et *(ii)* impliquent que $\mathcal{F}$ est relativement (séquentiellement) compacte. La réciproque est laissée en exercice.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$. On veut montrer qu'elle admet une sous-suite convergente. Comme X est compact, il existe une suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dense dans X. Par hypothèse, $\mathcal{F}(x_0)$ est d'adhérence compacte, donc il existe une fonction $\varphi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et un élément $f(x_0) \in F$ tel que $f_{\varphi_0(n)} \to f(x_0)$. De même, il existe une fonction $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et un élément $f(x_1) \in F$ tel que $f_{\varphi_0\circ\varphi_1(n)} \to f(x_1)$. Ainsi de suite, par extractions successives, on construit pour tout $p \in \mathbb{N}$ une fonction $\varphi_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et un point $f(x_p) \in F$ qui vérifient

$$\forall k \leqslant p, \quad f_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_p(n)}(x_k) \to f(x_k).$$

On définit alors, par le procédé diagonal de Cantor, la fonction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $\psi(n) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$. C'est clairement une fonction strictement croissante et elle vérifie, par construction,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad f_{\psi(n)}(x_p) \to f(x_p).$$

Démontrons maintenant que f est uniformément continue sur $\{x_p,\, p \in \mathbb{N}\}$. Comme X est compact, la famille $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue. Soit $\epsilon > 0$ et soit $\eta > 0$ tel que

$$\forall g \in \mathcal{F},\ \forall (x, y) \in X^2, \quad d(x, y) < \eta \implies \|g(x) - g(y)\|_F < \epsilon.$$

Pour tous p et q tels que $d(x_p, x_q) < \eta$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\|f(x_p) - f(x_q)\|_F \leqslant \|f(x_p) - f_{\psi(n)}(x_p)\|_F + \|f_{\psi(n)}(x_p) - f_{\psi(n)}(x_q)\|_F + \|f(x_q) - f_{\psi(n)}(x_q)\|_F.$$

En passant à la limite $n \to \infty$ on obtient que

$$\|f(x_p) - f(x_q)\|_F \leqslant \epsilon$$

et f est donc uniformément continue sur $\{x_p,\, p \in \mathbb{N}\}$, qui est une partie dense de X. Comme F est un espace de Banach, on en déduit alors que f peut-être prolongée de manière unique en une application uniformément continue sur X. On note encore f ce prolongement.

Pour conclure la preuve du théorème, puisque X est compact, il suffit de montrer la convergence simple de $(f_{\psi(n)})$ vers f. Soient $x \in X$ et $\epsilon > 0$, et soit $\eta > 0$ tel que

$$\forall y \in X,\ d(x, y) < \eta \implies \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_{\psi(n)}(x) - f_{\psi(n)}(y)\|_F + \|f(x) - f(y)\|_F < \frac{\epsilon}{2}.$$

Comme il existe p tel que $d(x, x_p) < \eta$, on a

$$\|f_{\psi(n)}(x) - f(x)\|_F \leqslant \|f_{\psi(n)}(x) - f_{\psi(n)}(x_p)\|_F + \|f_{\psi(n)}(x_p) - f(x_p)\|_F + \|f(x_p) - f(x)\|_F < \epsilon$$

pour n suffisamment grand. □

Corollaire 1.32. *Soit K un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^n$, et soit $\mathcal{F}$ une partie équicontinue de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}(x)$ soit bornée pour tout $x \in K$. Alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte.*

2 Analyse hilbertienne

2.1 Espaces préhilbertiens et espaces de Hilbert

Dans le cas réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), un produit scalaire sur un espace vectoriel est une forme bilinéaire symétrique définie positive. Dans le cas complexe ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), c'est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.

Définition 2.1 (Produit scalaire)**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit qu'une application $(\cdot, \cdot)$ de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ est un* produit scalaire *si*

(i) $\forall x, x', y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad (x + \lambda x', y) = (x, y) + \lambda(x', y),$

(ii) $\forall x, y \in E, \quad (x, y) = \overline{(y, x)},$

(iii) $\forall x \in E \backslash \{0\}, \quad (x, x) > 0.$

Muni de $(\cdot, \cdot)$, E est appelé espace préhibertien*.*

Proposition 2.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soit E un espace préhilbertien. Alors*

$$\forall x, y \in E, \qquad |(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration. Soient x et y dans E et soit θ un réel tel que $(x, y) = |(x, y)|e^{i\theta}$. On définit $P(\rho) := (xe^{-i\theta} + \rho y, xe^{-i\theta} + \rho y)$ pour tout réel ρ. Puisque $P \geqslant 0$, le discriminant de l'équation $P(\rho) = 0$ est négatif. Or comme

$$P(\rho) = (x, x) + 2\rho|(x, y)| + \rho^2(y, y)$$

cela donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Les cas d'égalité correspondent à un discriminant nul, ce qui revient à dire que P peut s'annuler. Autrement dit il existe $\rho_0 \in \mathbb{R}$ tel que $xe^{-i\theta} + \rho_0 y = 0$.

Autre rédaction. On suppose d'abord que (x, y) est réel et on considère $P(\rho) = \|x + \rho y\|^2$. Le discriminant étant toujours positif, on obtient le résultat. Si (x, y) n'est pas réel, le produit scalaire $(x, (x, y)y) = \overline{(x, y)}(x, y)$ est réel positif et on utilise le cas précédent. ☐

Corollaire 2.3. *L'application qui à $x \in E$ associe $\|x\| := \sqrt{(x, x)} \in \mathbb{R}$ est une norme sur E. On dit que c'est la norme associée au produit scalaire.*

Démonstration. Le seul point qui ne soit pas immédiat est l'inégalité triangulaire. Or grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x, y) + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned} \tag{1}$$

☐

Remarque 2.4. *L'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que le produit scalaire est une forme bilinéaire* continue *pour sa norme associée.*

Proposition 2.5 (Identité de polarisation)**.** *Dans tout espace préhilbertien réel (resp. complexe) on a*

$$\forall x, y \in E, \qquad (x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

$$\textit{resp.} \qquad (x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - \|x - y\|^2 - i\|x - iy\|^2).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer (1) à y, $-y$, iy et $-iy$ et de combiner les égalités obtenues. ☐

Corollaire 2.6. *Soit E un espace préhilbertien et soit f une isométrie sur E. Alors*

$$\forall x, y \in E, \qquad (f(x), f(y)) = (x, y).$$

En suivant la preuve de l'identité de polarisation, on obtient aussi l'*identité du parallélogramme.*

Proposition 2.7 (Identité du parallélogramme)**.** *Si E est un espace préhilbertien, alors on a*

$$\forall x, y \in E, \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Définition 2.8. *Un espace préhilbertien complet pour la norme associée au produit scalaire est appelé* espace de Hilbert.

2.2 Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Dans toute cette partie E désigne un espace préhilbertien réel ou complexe.

Définition 2.9 (Orthogonalité)**.** *On dit que deux éléments x et y de E sont* orthogonaux *si $(x, y) = 0$. On note alors $x \perp y$.*

Théorème 2.10 (Pythagore)**.** *Si $x \perp y$, alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de (1). □

Définition 2.11. *Pour tout $x \in E$ on définit l'*orthogonal *de x par*

$$x^\perp := \{y \in E,\ (x, y) = 0\}.$$

Et plus généralement, pour tout sous-ensemble $A \neq \varnothing$ de E, on définit l'orthogonal de A par

$$A^\perp := \{y \in E,\ \forall x \in A,\ (x, y) = 0\}.$$

Proposition 2.12. *Pour tout $A \subset E$ non vide, l'ensemble $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E, et l'on a $A \cap A^\perp \subset \{0\}$.*

Démonstration. Montrons d'abord que $A^\perp$ est fermé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $A^\perp$ convergeant vers $x \in E$. Pour tout $y \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|(x, y)| = |(x_n, y) + (x - x_n, y)| = |(x - x_n, y)| \leqslant \|x - x_n\|\|y\|.$$

Par convergence de la suite, le dernier terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini, et donc $x \in A^\perp$. Montrons maintenant que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E. Il est évident que $A^\perp$ contient 0, et la stabilité par combinaison linéaire découle de la linéarité du produit scalaire par rapport à la première variable. Enfin si $A \cap A^\perp$ contient un élément x alors ce x est orthogonal à lui-même donc est nul. □

Proposition 2.13. *Pour tout sous-ensemble A de E non vide on a $\overline{\operatorname{Vect} A} \subset (A^\perp)^\perp$.*

Démonstration. Il est évident que $A \subset (A^\perp)^\perp$. De plus, d'après la proposition précédente, un orthogonal est toujours un espace vectoriel fermé, donc $(A^\perp)^\perp$ doit contenir $\operatorname{Vect} A$ et son adhérence. □

⚠ Si E est de dimension finie et F est un sous-espace vectoriel de E alors $F = (F^\perp)^\perp$ (exercice : le démontrer). Mais en dimension infinie l'inclusion $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$ peut être stricte. Nous reviendrons plus loin sur les cas d'égalité.

Proposition 2.14. *Pour tout sous-ensemble A de E non vide on a $A^\perp = \overline{\operatorname{Vect} A}^\perp$.*

Démonstration. Clairement on a $A \subset \overline{\operatorname{Vect} A}$ et donc $\overline{\operatorname{Vect} A}^{\perp} \subset A^{\perp}$. Maintenant si $x \in A^{\perp}$, la linéarité du produit scalaire par rapport à la première variable assure que $x \in (\operatorname{Vect} A)^{\perp}$, puis la continuité du produit scalaire permet d'obtenir que $x \in \overline{\operatorname{Vect} A}^{\perp}$. □

Définition 2.15 (Famille orthogonale/orthonormale)**.** *On dit qu'une famille $(f_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est* orthogonale *si l'on a*

$$\forall i, j \in I, \quad i \neq j \implies (f_i, f_j) = 0.$$

On dit que $(f_i)_{i\in I}$ est orthonormale *si de plus $\|f_i\| = 1$ pour tout $i \in I$.*

Proposition 2.16. *Soit $(f_1, \cdots, f_n)$ une famille orthogonale constituée de vecteurs tous* non nuls. *Alors cette famille est libre.*

Démonstration. Supposons que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$. En prenant le produit scalaire de cette égalité avec f_j on obtient $\lambda_j \|f_j\|^2 = 0$. Or comme $f_j \neq 0$ on conclut que $\lambda_j = 0$. □

Proposition 2.17. *Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille orthonormale de E et soit $x \in \operatorname{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$. Alors*

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i.$$

Démonstration. Par hypothèse il existe un n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. On en déduit que $(x, e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i (e_i, e_j) = x_j$. □

Corollaire 2.18. *Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille orthonormale de E et soient x et y deux éléments de $\operatorname{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$. Alors on a*

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) \overline{(y, e_i)}.$$

Remarque 2.19. *En particulier on retrouve l'égalité de Pythagore $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2$.*

Proposition 2.20 (Inégalité de Bessel)**.** *Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale de E et soit $x \in E$. Alors la famille $((x, e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de carré sommable et on a l'inégalité*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a en utilisant le corollaire précédent

$$\left(x - \sum_{n=0}^{k} (x, e_n) e_n \, , \sum_{n=0}^{k} (x, e_n) e_n \right) = \sum_{n=0}^{k} |(x, e_n)|^2 - \sum_{n=0}^{k} |(x, e_n)|^2 = 0$$

qui implique par Pythagore que

$$\|x\|^2 = \left\| \sum_{n=0}^{k} (x, e_n) e_n \right\|^2 + \left\| x - \sum_{n=0}^{k} (x, e_n) e_n \right\|^2 = \sum_{n=0}^{k} |(x, e_n)|^2 + \left\| x - \sum_{n=0}^{k} (x, e_n) e_n \right\|^2.$$

On en déduit donc que $\sum_{n=0}^{k} |(x, e_n)|^2 \leqslant \|x\|^2$ puis on passe à la limite $k \to \infty$. □

Théorème 2.21 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)**.** *Soit $(a_1, \cdots, a_n)$ une famille libre de E. Alors il existe une unique famille orthonormale $(e_1, \cdots, e_n)$ telle que*

(i) $\forall j \in \{1, \cdots, n\}, \; \operatorname{Vect}(e_1, \cdots, e_j) = \operatorname{Vect}(a_1, \cdots, a_j)$,

(ii) $\forall j \in \{1, \cdots, n\},\ (a_j, e_j) \in \mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. On fait une récurrence limitée qu'on initialise en posant $e_1 = \frac{1}{\|a_1\|} a_1$. On a bien $\|e_1\| = 1$ et $(a_1, e_1) = \|a_1\| > 0$.
Supposons maintenant qu'on ait construit la famille $(e_1, \cdots, e_k)$ vérifiant (i) et (ii) pour $j \in \{1, \cdots, k\}$. Si $k = n$, la preuve est terminée. Sinon on cherche e_{k+1} sous la forme

$$e_{k+1} = \lambda\Big(a_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i\Big) \quad \text{avec } \lambda \neq 0.$$

Prenons le produit scalaire de cette égalité avec e_i (pour $i \in \{1, \cdots, k\}$). Pour que e_{k+1} soit orthogonal à e_i, il est nécessaire et suffisant que $(a_{k+1}, e_i) + \alpha_i = 0$. Donc

$$e_{k+1} = \lambda\Big(a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (a_{k+1}, e_i) e_i\Big).$$

Comme $a_{k+1} \notin \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ (car $(a_1, \cdots, a_{k+1})$ est libre), le terme entre parenthèses n'est pas nul. Pour rendre e_{k+1} de norme 1, il suffit donc de choisir $\lambda = \|a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (a_{k+1}, e_i) e_i\|^{-1}$. En conséquence

$$e_{k+1} = \frac{a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (a_{k+1}, e_i) e_i}{\|a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (a_{k+1}, e_i) e_i\|}.$$

En prenant le produit scalaire de e_{k+1} avec cette égalité, on obtient de plus

$$1 = \frac{(a_{k+1}, e_{k+1})}{\|a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (a_{k+1}, e_i) e_i\|},$$

ce qui montre que $(a_{k+1}, e_{k+1}) > 0$ et achève la preuve de l'existence.
L'unicité se démontre en reprenant la construction précédente et en vérifiant qu'à chaque étape il n'y a pas d'autre choix possible que celui que l'on a fait ci-dessus. □

En effectuant une récurrence complète, on obtient une version "infinie" du procédé d'orthonormalisation de Schmidt :

Théorème 2.22. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille libre de E. Alors il existe une unique famille orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que*

(i) $\forall j \in \mathbb{N},\ \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_j) = \mathrm{Vect}(a_1, \cdots, a_j)$,

(ii) $\forall j \in \mathbb{N},\ (a_j, e_j) \in \mathbb{R}_+^*$.

2.3 Projection orthogonale

Dans toute la suite H désigne un espace de Hilbert.

Théorème 2.23 (Projection sur un convexe fermé)**.** *Soit K un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert H. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique point $p_x \in K$ tel que*

$$\|x - p_x\| = d(x, K) := \inf_{y \in K} \|x - y\|.$$

Le point p_x est appelé projection *de x sur K. C'est l'unique point de K vérifiant*

$$\forall y \in K, \qquad \mathrm{Re}(x - p_x, y - p_x) \leqslant 0. \tag{2}$$

Démonstration. L'unicité vient du fait que si p_x et $p'_x \in K$ vérifient $\|x - p_x\| = \|x - p'_x\| = d(x, K)$, alors d'après l'*identité de la médiane* (conséquence facile de l'identité du parallélogramme) on a

$$\|x - p_x\|^2 + \|x - p'_x\|^2 = \frac{1}{2}\|p_x - p'_x\|^2 + 2\Big\|x - \frac{p'_x + p_x}{2}\Big\|^2$$

et donc

$$\|p'_x - p_x\|^2 = 4\bigg(d^2(x, K) - \Big\|x - \underbrace{\frac{p'_x + p_x}{2}}_{\in K}\Big\|^2\bigg) \leqslant 0$$

d'où $\|p'_x - p_x\| = 0$ puis $p'_x = p_x$.

Pour l'existence on note $d = d(x, K)$. Par définition il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ tel que $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = d$. D'après l'identité de la médiane, on a

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ \|x - x_m\|^2 + \|x - x_n\|^2 = \frac{1}{2}\|x_n - x_m\|^2 + 2\underbrace{\Big\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\Big\|^2}_{\geqslant d}$$

donc

$$\frac{1}{2}\|x_n - x_m\|^2 \leqslant \|x - x_m\|^2 + \|x - x_n\|^2 - 2d^2.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, et sa limite p_x appartient à K car K est fermé.

Il ne reste plus qu'à vérifier (2). Soit $y \in K$. Pour tout $t \in [0, 1]$ on définit $y_t = p_x + t(y - p_x)$. Comme $y_t \in K$, on a

$$\|x - p_x\|^2 \leqslant \|x - y_t\|^2 = \|x - p_x\|^2 + t^2\|y - p_x\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}(x - p_x, y - p_x).$$

En faisant tendre t vers 0 on en déduit que $\mathrm{Re}(x - p_x, y - p_x) \leqslant 0$.

Réciproquement si $x_0 \in K$ vérifie $\mathrm{Re}(x - x_0, y - x_0) \leqslant 0$ pour tout $y \in K$, alors, puisque $\mathrm{Re}(x_0 - p_x, x - p_x) \leqslant 0$,

$$\|x_0 - p_x\|^2 = \mathrm{Re}(x_0 - p_x, x_0 - x) + \mathrm{Re}(x_0 - p_x, x - p_x) \leqslant 0$$

et donc $x_0 = p_x$. □

Corollaire 2.24. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Pour tout $x \in H$, la projection de x sur F est l'unique point p_x de F tel que $x - p_x \in F^\perp$.*

Démonstration. On a déjà vu que

$$\forall z \in F, \qquad \mathrm{Re}(x - p_x, z - p_x) \leqslant 0.$$

Pour $y \in F$ fixé, on a en prenant $z = p_x - y$ puis $z = p_x + y$ (et aussi $z = p_x \pm iy$ dans le cas complexe) que $(x - p_x, y) = 0$.

Soit p'_x un point de F tel que $x - p'_x \in F^\perp$. Comme $p'_x - p_x \in F$ on a $(x - p_x, p'_x - p_x) = 0$ et $(x - p'_x, p'_x - p_x) = 0$. Donc par soustraction $\|p'_x - p_x\|^2 = 0$, $p'_x = p_x$. □

Proposition 2.25. *Soit F un sous-espace vectoriel de H. Les trois énoncés suivant sont équivalents :*

(i) F *est fermé,*

(ii) $H = F \oplus F^\perp$,

(iii) $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration. $(i) \implies (ii)$. Supposons F fermé. Soit $x \in H$ et soit p_x sa projection sur F. On a $x = p_x + (x - p_x)$ avec $p_x \in F$ et $x - p_x \in F^\perp$.

$(ii) \implies (iii)$. Soit $x \in (F^\perp)^\perp$. On écrit $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$. On a donc $(x, z) = (y, z) + \|z\|^2$. Comme x est orthogonal à $F^\perp$, $(x, z) = 0$. Mais comme $y \in F$ et $z \in F^\perp$, $(y, z) = 0$. Donc $z = 0$, c'est-à-dire $x \in F$. Et donc $(F^\perp)^\perp \subset F$. Or comme on a toujours $F \subset (F^\perp)^\perp$, on a la conclusion.

$(iii) \implies (i)$. $F = (F^\perp)^\perp$, or un orthogonal est toujours fermé. □

Corollaire 2.26. *Pour tout sous-ensemble A de H on a* $\overline{\operatorname{Vect} A} = (A^\perp)^\perp$.

Démonstration. On note $F = \overline{\operatorname{Vect} A}$. Il faut montrer $(A^\perp)^\perp \subset F$. Par la proposition précédente on a que $(F^\perp)^\perp = F$. Mais comme $A \subset F$, on a $A^\perp \supset F^\perp$ puis $(A^\perp)^\perp \subset (F^\perp)^\perp = F$. □

Définition 2.27. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Le sous-espace vectoriel $F^\perp$ est appelé* supplémentaire orthogonal *de F. Tout élément x de H se décompose de manière unique en*

$$x = y + z \quad \text{avec } y \in F \text{ et } z \in F^\perp.$$

Le vecteur y est le projeté orthogonal *de x sur F et l'application $x \mapsto y$ est appelée* projection orthogonale *sur F.*

Exercice. Vérifier que si p est une projection orthogonale, alors pour tout $x \in H$ on a $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Proposition 2.28. *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de H, et soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de F. Le projecteur orthogonal p sur F est donné par la formule*

$$\forall x \in H, \qquad p(x) = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i.$$

Démonstration. Il est clair que $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$. □

Corollaire 2.29. *Soit F un sous-espace vectoriel de H de dimension finie, et soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de F. Alors on a*

$$\forall x \in H, \qquad d(x, F) = \|x - p(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2}.$$

De plus $p(x)$ est l'unique point de F où cette distance est atteinte.

2.4 Deux résultats importants dans les Hilbert

Théorème 2.30 (Riesz-Fréchet)**.** *Soit H un Hilbert. Pour tout $f \in H'$, il existe un unique $x \in H$ tel que*

$$\forall y \in H, \qquad f(y) = (y, x).$$

De plus $\|x\| = \|f\|_{H'}$.

Démonstration. On commence par l'unicité. Si $f(y) = (y, x) = (y, x')$ pour tout $y \in H$, alors pour tout $y \in H$, $(y, x - x') = 0$, et donc $x - x' = 0$.
Pour l'existence on exclut le cas $f = 0$ qui est évident. Soit donc $f \in H' \backslash \{0\}$. Alors $\operatorname{Ker} f$ est un hyperplan fermé de H qui admet donc un supplémentaire orthogonal $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ non réduit à $\{0\}$. Soit $x_0 \in (\operatorname{Ker} f)^\perp \backslash \{0\}$. On a $f(x_0) \neq 0$ et

$$\forall y \in H, \quad y - \frac{f(y)}{f(x_0)} x_0 \in \operatorname{Ker} f.$$

On a donc

$$\forall y \in H, \quad (y, x_0) = \frac{f(y)}{f(x_0)} \|x_0\|^2.$$

On pose alors $x = \frac{\overline{f(x_0)}}{\|x_0\|^2} x_0$.
Enfin, puisque $f(y) = (y, x)$ pour tout $y \in H$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que $|f(y)| \leqslant \|x\| \|y\|$, et donc $\|f\|_{H'} \leqslant \|x\|$. Mais comme $f(x) = \|x\|^2$, on a en fait $\|f\|_{H'} = \|x\|$. □

Théorème 2.31 (Lax-Milgram)**.** *Soit H un Hilbert et soit $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue sur H. On suppose que a est* coercive*, c'est-à-dire*

$$\exists c_0 > 0,\ \forall x \in H, \quad |a(x,x)| \geqslant c_0\|x\|^2.$$

Alors pour tout $f \in H'$ il existe un unique $x \in H$ tel que

$$\forall y \in H, \qquad a(y,x) = f(y).$$

Démonstration. Comme a est continue, pour tout $x \in H$ l'application $y \mapsto a(y,x)$ est une forme linéaire continue sur H. Donc par le théorème de représentation de Riesz-Fréchet il existe un unique $A_x \in H$ tel que

$$\forall y \in H, \quad a(y,x) = (y, A_x).$$

Il est clair que $A : x \mapsto A_x$ est linéaire dans le cas réel et semi-linéaire dans le cas complexe. De plus, par continuité de a, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x \in H, \quad \|A_x\|^2 = (A_x, A_x) = a(A_x, x) \leqslant C\|A_x\|\|x\|.$$

Donc A est continue de H dans H. Par ailleurs, toujours d'après Riesz-Fréchet, il existe $x_0 \in H$ tel que

$$\forall y \in H, \quad f(y) = (y, x_0).$$

On est donc ramené à résoudre l'équation $A(x) = x_0$.

Preuve dans le cas où la coercivité est remplacée par la condition plus forte $\operatorname{Re} a(x,x) \geqslant c_0\|x\|^2$. Pour $\rho > 0$, considérons l'application

$$S_\rho : \left\{ \begin{array}{ccc} H & \to & H \\ x & \mapsto & x + \rho(x_0 - A(x)) \end{array} \right. .$$

Clairement, à ρ fixé, résoudre $A(x) = x_0$ revient à trouver un point fixe pour S_ρ. On a pour tous $x, x' \in H$

$$\|S_\rho(x) - S_\rho(x')\|^2 = \|x - x'\|^2 - 2\rho \operatorname{Re}\big(x - x', A(x - x')\big) + \rho^2\|A(x - x')\|^2.$$

Donc en utilisant la coercivité (renforcée) de a et la continuité de A on a

$$\forall x, x' \in H, \quad \|S_\rho(x) - S_\rho(x')\|^2 \leqslant (1 - 2\rho c_0 + \rho^2 C^2)\|x - x'\|^2.$$

On choisit $\rho > 0$ suffisamment petit pour avoir $1 - 2\rho c_0 + \rho^2 C^2 < 1$ (par exemple $\rho = \frac{c_0}{C}$). Alors S_ρ est contractante et on conclut en appliquant le théorème de point fixe de Banach-Picard.

Preuve dans le cas général. On prouve que A est injective et surjective. Par coercivité de a et en appliquant Cauchy-Schwarz on a pour tout $x \in H$

$$c_0\|x\|^2 \leqslant |a(x,x)| = |(x, A(x))| \leqslant \|A(x)\|\|x\|,$$

et donc $\|A(x)\| \geqslant c_0\|x\|$ pour tout $x \in H$. On en déduit que A est injective et d'image fermée. Notons Z cette image. Par le théorème du supplémentaire orthogonal d'un fermé, on sait que $H = Z \oplus Z^\perp$. Soit maintenant $z \in Z^\perp$. On a par définition $(z, A(z)) = 0$ et donc

$$c_0\|z\|^2 \leqslant |a(z,z)| = |(z, A(z))| = 0.$$

On en déduit que $z = 0$, donc $Z^\perp = \{0\}$, et par suite A est surjectif. □

2.5 Bases hilbertiennes

Théorème 2.32. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthogonale d'un espace de Hilbert H. Alors la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ converge dans H si et seulement si la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \|x_n\|^2$ converge, et dans ce cas on a l'*égalité de Parseval *:*

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2.$$

Démonstration. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$. Pour $m > n$, on a $S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^{m} x_k$. Par orthogonalité de la famille $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on a donc

$$\|S_m - S_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\|^2.$$

Si l'on suppose que $\sum_{k\geqslant 0} \|x_k\|^2$ est convergente alors le terme de droite tend vers 0 (uniformément en $m > n$) quand n tend vers l'infini, et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme H est complet, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Réciproquement si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $S \in H$, alors on a, toujours par orthogonalité des $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \|x_k\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|S_n\|^2 = \|S\|^2 < \infty.$$

Ce qui donne aussi Parseval. $\square$

En combinant le résultat de ce théorème et l'inégalité de Bessel, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2.33. *Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale dans un espace de Hilbert H, et soit $x \in H$. Alors la série $\sum_{n\geqslant 0}(x, e_n)e_n$ converge vers $p(x)$, où p est la projection orthogonale sur $\overline{\mathrm{Vect}\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}}$.*

Démonstration. On applique le théorème 2.32 à la suite $x_n = (x, e_n)e_n$. On sait par la proposition 2.20 que la famille $\|x_n\| = |(x, e_n)|$ est de carré sommable et on a donc que la série $\sum_{n\geqslant 0}(x, e_n)e_n$ est convergente. On note y sa limite et on veut vérifier que $y = p(x)$. Tout d'abord il est clair que $y \in \overline{\mathrm{Vect}\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}}$. Ensuite pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a, par continuité et linéarité du produit scalaire par rapport à la première variable,

$$(y, e_n) = \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} (x, e_k)e_k\,,\, e_n\right) = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} (x, e_k)e_k\,,\, e_n\right) = (x, e_n)$$

qui assure que $x - y \in (\mathrm{Vect}\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\})^\perp = \overline{\mathrm{Vect}\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}}^\perp$, grâce à la proposition 2.14. $\square$

Définition 2.34 (Ensemble total)**.** *On dit qu'un sous-ensemble A d'un espace de Hilbert H est* total *si le sous-espace vectoriel* Vect A *engendré par A est dense dans H.*

Proposition 2.35. *Soit A un sous-ensemble d'un espace de Hilbert H. Alors A est totale si et seulement si $A^\perp = \{0\}$.*

Démonstration. Si A est total on utilise la proposition 2.14 pour dire que $A^\perp = \overline{\mathrm{Vect}\, A}^\perp = \{0\}$.
Réciproquement si $A^\perp = \{0\}$ alors on utilise le corollaire 2.26 qui assure que $\overline{\mathrm{Vect}\, A} = \left(A^\perp\right)^\perp = H$. $\square$

Remarque 2.36. *Comme cas particulier très important, on obtient qu'un sous-espace vectoriel F de H est dense si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.*

Définition 2.37 (Base hilbertienne)**.** *Soit H un espace de Hilbert et soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H. On dit que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une* base hilbertienne *de H si c'est une famille orthonormale et totale.*

Remarque 2.38. *Grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on obtient facilement qu'un espace de Hilbert admet une base hilbertienne (dénombrable) si et seulement si il est séparable.*

Théorème 2.39. *Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale dans un espace de Hilbert H. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale ;*

(ii) $\forall x \in H,\ x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (x, e_n) e_n$;

(iii) $\forall x \in H,\ \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |(x, e_n)|^2$.

Démonstration. $(i) \implies (ii)$. La projection orthogonale sur $\overline{\mathrm{Vect}\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}} = H$ est l'identité.
$(ii) \implies (iii)$. C'est une conséquence immédiate de l'égalité de Parseval appliquée à $x_n = (x, e_n)e_n$.
$(iii) \implies (i)$. Si $x \in \{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}^{\perp}$, alors clairement $\|x\|^2 = 0$ et donc $x = 0$. □

3 Équations différentielles

On s'intéresse à des équations différentielles de degré 1 dans $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire des équations de la forme

$$X' = f(t, X) \tag{3}$$

où l'inconnue est $X = X(t)$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ est une fonction donnée avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$. On supposera toujours que f est continue.

Définition 3.1. *On appelle* solution *de l'équation différentielle* (3) *toute fonction X de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $J \subset I$ et à valeurs dans Ω qui satisfait*

$$X'(t) = f(t, X(t)) \qquad \textit{pour tout} \ \ t \in J.$$

Avant de s'intéresser aux solutions d'une équation différentielle, on commence par donner un lemme classique et très utile.

Lemme 3.2 (Grönwall)**.** *Soient u, a, b trois fonctions continues sur un intervalle $[t_0, t_1]$ à valeurs réelles. Si la fonction a est positive et que*

$$u(t) \leqslant b(t) + \int_{t_0}^t a(s)u(s)\, ds \qquad \textit{pour tout} \quad t \in [t_0, t_1],$$

alors

$$u(t) \leqslant b(t) + \int_{t_0}^t a(s)b(s)e^{\int_s^t a(s')ds'} ds \qquad \textit{pour tout} \quad t \in [t_0, t_1].$$

Démonstration. On pose $v(t) = \int_{t_0}^t a(s)u(s)\, ds$. Cette fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifie l'inégalité différentielle

$$v'(t) \leqslant a(t)b(t) + a(t)v(t),$$

et donc

$$\frac{d}{dt}\Big(v(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}\Big) \leqslant a(t)b(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}.$$

Puisque $v(t_0) = 0$, on en déduit par intégration que

$$v(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} \leqslant \int_{t_0}^t a(s)b(s)e^{-\int_{t_0}^s a(s')ds'} ds,$$

qui s'écrit aussi

$$v(t) \leqslant \int_{t_0}^t a(s)b(s)e^{\int_s^t a(s')ds'} ds.$$

En injectant cette information dans l'hypothèse du lemme on obtient bien la conclusion. □

3.1 Problème de Cauchy

On appelle problème de Cauchy le système d'équations

$$\begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)), & t \in J, \\ X(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{4}$$

où $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$ est donné.

Définition 3.3. *On dit qu'une fonction* $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ *est* localement lipschitzienne en sa seconde variable *si pour tout intervalle* $[t_-, t_+] \subset I$ *et tout compact* $K \subset \Omega$ *il existe* $L > 0$ *tel que*

$$\forall t \in [t_-, t_+], \forall x, y \in K, \qquad \|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant L\|x - y\|. \tag{5}$$

Le théorème qui suit est un résultat d'existence locale et d'unicité pour le problème de Cauchy (4).

Théorème 3.4 (Cauchy-Lipschitz)**.** *Supposons que* f *est continue sur* $I \times \Omega$ *et localement lipschitzienne en sa seconde variable. Alors, pour tout* $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ *:*

(i) il existe $\tau > 0$ *et* $X \in \mathcal{C}^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau], \Omega)$ *solution de* (4) *avec* $J = [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ *;*

(ii) si X_1 *et* X_2 *sont des solutions de* (4) *sur des intervalles* J_1 *et* J_2*, alors* $X_1 = X_2$ *sur* $J_1 \cap J_2$*.*

Démonstration. (i) Existence. On démontre un résultat un peu plus fort, à savoir que :

Pour tout intervalle $[t_-, t_+] \subset I$ et tout compact $K \subset \Omega$, il existe $\tau > 0$ tel que pour tout $(t_0, x_0) \in [t_-, t_+] \times K$ il existe une solution $X \in \mathcal{C}^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau], \Omega)$ de (4) avec $J = [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.

L'idée de la démonstration est de réécrire le problème de Cauchy (4) sous la forme intégrale

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\, ds$$

et d'utiliser le théorème de Banach-Picard pour obtenir l'existence d'un point fixe pour l'opérateur Γ défini par

$$\Gamma X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\, ds.$$

Soient $[t_-, t_+] \subset I$ et $K \subset \Omega$ compact. On se donne $\epsilon > 0$ assez petit pour que $[t_-^\epsilon, t_+^\epsilon] := [t_- - \epsilon, t_+ + \epsilon] \subset I$ et $K_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^d,\ d(x, K) \leqslant \epsilon\} \subset \Omega$, et on note L_ϵ la constante de Lipschitz locale correspondant à $[t_-^\epsilon, t_+^\epsilon]$ et K_ϵ. Comme f est continue, il existe une constante M_ϵ telle que

$$\|f(t,x)\| \leqslant M_\epsilon \qquad \text{pour tous} \quad t \in [t_-^\epsilon, t_+^\epsilon] \quad \text{et} \quad x \in K_\epsilon.$$

On choisit alors $\tau > 0$ suffisamment petit pour que

$$\tau \leqslant \epsilon, \qquad \tau M_\epsilon \leqslant \epsilon \qquad \text{et} \qquad \tau L_\epsilon < 1.$$

On fixe maintenant $(t_0, x_0) \in [t_-, t_+] \times K$. La condition $\tau \leqslant \epsilon$ assure que ΓX est bien défini pour X dans

$$E := \mathcal{C}([t_0 - \tau, t_0 + \tau], K_\epsilon).$$

La condition $\tau M_\epsilon \leqslant \epsilon$ assure que l'opérateur Γ ainsi défini envoie E dans lui-même puisque pour tout $X \in E$ et tout $t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ on a

$$\|\Gamma X(t) - x_0\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, X(s))\|\, ds \right| \leqslant |t - t_0| M_\epsilon \leqslant \tau M_\epsilon \leqslant \epsilon.$$

Muni de la distance induite par la norme $\|\cdot\|_\infty$, l'ensemble E est un espace métrique complet, et la dernière condition $\tau L_\epsilon < 1$ assure que Γ est une contraction stricte pour cette norme puisque pour tous $X, Y \in E$ et tout $t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ on a

$$\|\Gamma X(t) - \Gamma Y(t)\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, X(s)) - f(s, Y(s))\|\, ds \right| \leqslant \tau L_\epsilon \|X - Y\|_\infty.$$

Le théorème de point fixe de Banach-Picard assure donc l'existence d'un unique point fixe dans E pour l'opérateur Γ, et ce point fixe est la solution recherchée.

(ii) Unicité. Soient X_1 et X_2 des solutions de (4) sur des intervalles J_1 et J_2. On suppose que $J_1 \cap J_2$ n'est pas réduit à $\{t_0\}$, auquel cas le résultat est immédiat. On a alors que l'intervalle $J_1 \cap J_2$ n'est pas d'intérieur vide et on note $]t_-, t_+[$ cet intérieur. Remarquons que nécessairement $t_- \leqslant t_0 \leqslant t_+$.

Si $t_+ > t_0$, alors pour tout $\epsilon \in]0, t_+ - t_0[$ les fonctions X_1 et X_2 sont continues sur $[t_0, t_+ - \epsilon]$ et leur image sur cet intervalle compact est donc compacte dans Ω. On note K_ϵ la réunion de ces deux images et L_ϵ la constante de Lipschitz de f sur $[t_0, t_+ - \epsilon] \times K_\epsilon$. On a alors

$$\|X_1(t) - X_2(t)\| \leqslant \|X_1(t_0) - X_2(t_0)\| + L_\epsilon \int_{t_0}^{t} \|X_1(s) - X_2(s)\| \, ds$$

sur $[t_0, t_+ - \epsilon]$ et le lemme de Grönwall nous assure que

$$\|X_1(t) - X_2(t)\| \leqslant e^{L_\epsilon t} \|X_1(t_0) - X_2(t_0)\| = 0$$

pour tout $t \in [t_0, t_+ - \epsilon]$. On en déduit l'égalité de X_1 et X_2 sur $[t_0, t_+[$, et même sur $[t_0, t_+]$ si $t_+ \in J_1 \cap J_2$ par continuité de X_1 et X_2.

Si $t_- < t_0$ on obtient de la même manière l'égalité de X_1 et X_2 sur $]-\infty, t_0] \cap J_1 \cap J_2$ en écrivant que

$$X_1(t_0 - t) - X_2(t_0 - t) = X_1(t_0) - X_2(t_0) - \int_0^t \big(f(t_0 - s, X_1(t_0 - s)) - f(t_0, s, X_2(t_0 - s)) \big) \, ds$$

pour tout $t \in [0, t_0 - t_-[$ et en appliquant le lemme de Grönwall. $\square$

Le résultat d'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz assure qu'il existe un plus grand intervalle $J \subset I$ sur lequel le problème de Cauchy (4) admet une solution, et que cette solution est unique. Cette solution est appelée *solution maximale* : par définition on ne peut pas la prolonger au delà de J. Lorsque $J = I$, on dit que cette solution est *globale.*

Théorème 3.5. *On se place sous les mêmes hypothèses sur f que dans le théorème 3.4, et on considère $X \in \mathcal{C}^1(J, \Omega)$ une solution maximale de (3). Alors ou bien $\sup J = \sup I$ ou bien "X sort de tout compact de Ω", c'est-à-dire que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $t_K < \sup J$ tel que*

$$X(t) \in \Omega \backslash K \qquad \textit{pour tout} \;\; t \in J \cap [t_K, +\infty[.$$

Et on a le résultat analogue pour les bornes inférieures.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $t_+ := \sup J < \sup I$ et qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ et une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset J$ tendant vers t_+ telle que $(X(t_n)) \subset K$. Comme on l'a montré dans la preuve du point *(i)* du théorème 3.4, on peut trouver un $\tau > 0$ tel que pour tout $(s_0, y_0) \in [t_0, t_+] \times K$ il existe une solution $Y \in \mathcal{C}^1([s_0 - \tau, s_0 + \tau], \Omega)$ de (3) telle que $Y(s_0) = y_0$. Comme t_n tend vers t_+, il existe un n_0 tel que $t_{n_0} \in [t_+ - \tau/2, t_+]$ et donc une solution $Y \in \mathcal{C}^1([t_{n_0} - \tau, t_{n_0} + \tau], \Omega)$ de (3) telle que $Y(t_{n_0}) = X(t_{n_0})$. Ceci contredit le fait que X soit une solution maximale puisque $t_{n_0} + \tau > t_+$. $\square$

Exemple. *Pour l'équation de Ricatti où $I = \Omega = \mathbb{R}$ et $f(t, x) = x^2$, seule la solution nulle est globale.*

Corollaire 3.6. *On considère le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$ et on suppose que f est continue sur $I \times \mathbb{R}^d$, localement lipschitzienne en sa seconde variable, et que pour tout $[t_-, t_+] \subset I$ il existe $M > 0$ tel que*

$$\forall t \in [t_-, t_+], \forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad \|f(t, x)\| \leqslant M(1 + \|x\|). \tag{6}$$

Alors toutes les solutions maximales de (3) sont globales.

Démonstration. Soit $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^d$ et soit $X \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^d)$ la solution maximale de (4). Supposons par l'absurde que $t_+ := \sup J < \sup I$. On part alors de

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\, ds$$

pour en déduire en utilisant (6) l'existence d'un $M > 0$ tel que

$$\|X(t)\| \leqslant \|x_0\| + M(t_+ - t_0) + M \int_{t_0}^{t} \|X(s)\|\, ds$$

pour tout $t \in [t_0, t_+[$. Le lemme de Grönwall assure alors que

$$\|X(t)\| \leqslant \big(\|x_0\| + M(t_+ - t_0)\big) e^{M(t_+ - t_0)}$$

pour tout $t \in [t_0, t_+[$. Cette estimée empêche la sortie de tout compact, ce qui contredit le théorème 3.5. On en déduit donc que $\sup J = \sup I$, et par le même raisonnement que $\inf J = \inf I$. Comme I est ouvert, cela donne bien que $J = I$. $\square$

Remarque 3.7. *Si la fonction f est* globalement lipschitzienne en sa seconde variable *sur $I \times \mathbb{R}^d$, c'est-à-dire s'il existe $L > 0$ tel que*

$$\forall t \in I, \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \qquad \|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant L\|x - y\|,$$

alors f vérifie clairement à la fois (5) *et* (6)*.*

On va maintenant relaxer les hypothèses (et la conclusion) de Cauchy-Lipschitz. Le théorème 3.8 ci-dessous assure que l'hypothèse de continuité de f est suffisante pour garantir l'existence locale d'une solution, c'est-à-dire le point *(i)* du théorème 3.4. En revanche l'unicité est perdue, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. *Considérons l'équation différentielle $X'(t) = 2\sqrt{|X(t)|}$ sur $I \times \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pour tout $a \geqslant 0$, la fonction $X(t) = \mathbb{1}_{t \geqslant a}(t - a)^2$ est une solution globale du problème de Cauchy avec donnée initiale $X(0) = 0$.*

Théorème 3.8 (Cauchy-Peano-Arzelà)**.** *Supposons que f est continue sur $I \times \Omega$. Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe $\tau > 0$ et $X \in \mathcal{C}^1([t_0 - \tau, t_0 + \tau], \Omega)$ solution de* (4) *avec $J = [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$.*

Démonstration. On peut toujours trouver une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{C}^1(I \times \Omega)$ telle que $f_n \to f$ uniformément sur tout compact de $I \times \Omega$, par exemple en prenant

$$f_n(t,x) = \int_{I \times \Omega} f(s,y)\rho_n(t-s, x-y) ds dy \qquad \text{avec} \quad \rho_n = n^{d+1}\rho(n\,\cdot),\ \rho \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^{d+1}),\ \rho \geqslant 0,\ \int \rho = 1.$$

Par Cauchy-Lipschitz on a alors pour tout n une unique solution X_n d'intervalle maximal $J_n \subset I$ au problème de Cauchy $X' = f_n(t, X)$, $X(t_0) = x_0$. On va maintenant montrer qu'il existe $\tau > 0$ tel que $[t_0 - \tau, t_0 + \tau] \subset J_n$ pour tout n.

On commence par prendre $\epsilon > 0$ tel que $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times \overline{B}(x_0, \epsilon) \subset I \times \Omega$. Comme f_n converge uniformément vers f sur tout compact, il existe $M_\epsilon > 0$ tel que

$$\|f_n(t,x)\| \leqslant M_\epsilon \qquad \text{pour tous} \quad t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon],\ x \in \overline{B}(x_0, \epsilon) \ \text{ et } \ n \in \mathbb{N}.$$

On choisit alors $\tau > 0$ suffisamment petit pour que $\tau M_\epsilon \leqslant \epsilon$ et on obtient, comme dans la preuve du théorème 3.4-*(i)*, que $X_n(t) \in \overline{B}(x_0, \epsilon)$ pour tout $t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$. Le théorème de sortie de tout compact garantit donc que $[t_0 - \tau, t_0 + \tau] \subset J_n$.

On en déduit également que $t \mapsto f_n(t, X_n(t))$ est uniformément bornée sur $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$, et X_n' aussi. La suite X_n est donc uniformément lipschitzienne et le théorème d'Ascoli assure alors que l'on peut en extraire une sous-suite $X_{\varphi(n)}$ qui converge vers X dans $\mathcal{C}([t_0 - \tau, t_0 + \tau], \mathbb{R}^d)$. Donc on a aussi que $t \mapsto f_n(t, X_{\varphi(n)}(t))$ tend vers $t \mapsto f(t, X(t))$ dans $\mathcal{C}([t_0 - \tau, t_0 + \tau], \mathbb{R}^d)$. En passant à la limite dans $X_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f_n(s, X_n(s)) ds$, on obtient bien que X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ et vérifie $X' = f(t, X)$. $\square$

3.2 Systèmes différentiels linéaires

On s'intéresse ici aux équations différentielles du type

$$X' = A(t)X + B(t) \tag{7}$$

où A est une fonction continue de I dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et B est une fonction continue de I dans $\mathbb{R}^d$. On remarque que les hypothèses du corollaire 3.6 sont vérifiées, et ce système d'équations admet donc pour toute donnée initiale $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^d$ une unique solution maximale, qui est globale.

Il est utile pour étudier (7) de considérer l'équation

$$M' = A(t)M \tag{8}$$

dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

Définition 3.9. *On appelle* résolvante *de l'équation différentielle*

$$X' = A(t)X$$

l'application

$$\begin{array}{rccc} R: & I \times I & \to & \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \\ & (t, t_0) & \mapsto & R(t, t_0) \end{array}$$

où $t \mapsto R(t, t_0)$ est la solution du problème de Cauchy pour (8) avec donnée initiale $R(t_0, t_0) = \mathrm{I}_d$.

Proposition 3.10. *La résolvante vérifie la propriété de semi-groupe*

$$R(t, s)R(s, t_0) = R(t, t_0)$$

pour tous $t, s, t_0 \in I$.

Démonstration. Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $X(t) = R(t, t_0)x_0$. Alors la solution du problème de Cauchy $Y' = A(t)Y$ avec donnée initiale $Y(s) = X(s)$ n'est autre que X, mais elle s'exprime aussi comme

$$Y(t) = R(t, s)X(s) = R(t, s)R(s, t_0)x_0,$$

d'où la conclusion. □

Lemme 3.11. *Dans le cas autonome, c'est-à-dire quand la matrice A ne dépend pas de t, on a la formule*

$$R(t, s) = \exp\big((t - s)A\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - s)^n}{n!} A^n.$$

Via ce lemme, on remarque que l'étude du spectre de A fournit des informations essentielles pour caractériser le comportement des solutions de $X' = AX$ dans le cas autonome.

⚠ Dans le cas non-autonome, on a en dimension $d = 1$ la formule $R(t, s) = e^{\int_s^t a(\tau) d\tau}$. Il est important de noter que cette formule ne se généralise pas à la dimension supérieure ! Ceci est lié au fait que $e^A e^B$ n'est pas égal à e^{A+B} quand les matrices A et B ne commutent pas.

Proposition 3.12 (Formule de Duhamel, ou variation de la constante)**.** *La solution du problème de Cauchy (7) avec donnée initiale $X(t_0) = x_0$ s'exprime en fonction de la résolvante R à travers la formule*

$$X(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)B(s)\, ds.$$

3.3 Équations différentielles autonomes

On s'intéresse ici aux équations différentielles *autonomes*, c'est-à-dire de la forme

$$X' = f(X).$$

On supposera que f est de classe $\mathcal{C}^1$, et donc en particulier localement lipschitzienne. Comme la fonction f ne dépend pas de t, l'intervalle de définition en temps est $I = \mathbb{R}$ et on peut toujours se ramener par translation au cas où $t_0 = 0$. Le problème de Cauchy que l'on considère est alors celui de donnée initiale $X(0) = x_0$.

Rappel : Un point singulier du champ de vecteurs f est un point $x \in \Omega$ tel que $f(x) = 0$. C'est donc un point d'équilibre pour l'équation $X' = f(X)$.

Définition 3.13 (Stabilité au sens de Lyapunov)**.** *Un point singulier $\bar{x}$ d'un champ de vecteurs $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ est un point d'équilibre* stable *s'il existe un voisinage $\mathcal{V}_0$ de $\bar{x}$ dans Ω tel que*

(i) pour tout $x_0 \in \mathcal{V}_0$, la solution maximale du problème de Cauchy est définie pour tout $t \geqslant 0$;

(ii) pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de $\bar{x}$ dans Ω, il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_0$ tel que $X(t)$ appartient à $\mathcal{U}$ pour tout $t \geqslant 0$ et tout $x_0 \in \mathcal{V}$.

Si de plus on a

(iii) $X(t)$ converge vers $\bar{x}$ quand $t \to +\infty$ pour tout $x_0 \in \mathcal{V}_0$,

alors le point d'équilibre $\bar{x}$ est dit asymptotiquement stable*. On dit qu'un point est* instable *quand il n'est pas stable.*

Pour les système linéaires, on a le résultat suivant dont la preuve repose sur des résultats d'algèbre linéaire.

Théorème 3.14. *Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Le point 0 est stable pour l'équation $X' = AX$ si et seulement si*

(i) les valeurs propres de A sont toutes de partie réelle négative ou nulle,

(ii) les valeurs propres imaginaires pures de A sont semi-simples *(pas de bloc de Jordan non trivial).*

Le point 0 est asymptotiquement stable si et seulement si

(iii) les valeurs propres de A sont toutes de partie réelle strictement négative.

Pour les équations non-linéaires, on a les résultats de Lyapunov qui suivent.

Définition 3.15 (Fonction de Lyapunov)**.** *On appelle* fonction de Lyapunov *pour le champ de vecteurs f toute fonction $F \in \mathcal{C}^1(\Omega', \mathbb{R})$, avec $\Omega' \subset \Omega$ ouvert, telle que*

$$\nabla F(x) \cdot f(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in \Omega'.$$

La motivation de cette définition est que si Ω' est stable par l'équation $X' = f(X)$, alors F est décroissante le long des trajectoires issues de Ω'. En effet si $x_0 \in \Omega'$, on a pour tout $t \geqslant 0$ dans l'intervalle maximal d'existence

$$\frac{d}{dt} F(X(t)) = \nabla F(X(t)) \cdot X'(t) = \nabla F(X(t)) \cdot f(X(t)) \leqslant 0.$$

Théorème 3.16 (Lyapunov n°1)**.** *Soit $\bar{x}$ un point singulier du champ $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. On suppose qu'il existe un voisinage Ω' de $\bar{x}$ dans Ω et une fonction de Lyapunov $F \in \mathcal{C}^1(\Omega', \mathbb{R})$ pour laquelle $\bar{x}$ est un minimum local strict. Alors $\bar{x}$ est un point d'équilibre stable.*

Si de plus F est une fonction de Lyapunov forte, c'est-à-dire si $\nabla F(x) \cdot f(x) < 0$ pour tout $x \in \Omega' \backslash \{\bar{x}\}$, alors $\bar{x}$ est asymptotiquement stable.

Démonstration. Comme $\bar{x}$ est un minimum local strict, il existe $\eta_0 > 0$ tel que $\overline{B}(\bar{x}, \eta_0) \subset \Omega'$ et $F(x) > F(\bar{x})$ pour tout $x \in \overline{B}(\bar{x}, \eta_0) \backslash \{\bar{x}\}$.

Pour n'importe quel η tel que $0 < \eta \leqslant \eta_0$, on note $\epsilon > 0$ le minimum de $F(x) - F(\bar{x})$ sur le bord de $\overline{B}(\bar{x}, \eta)$ et

$$\mathcal{V}_\eta = \{x \in B(\bar{x}, \eta),\ F(x) < F(\bar{x}) + \epsilon\}.$$

Cet ensemble $\mathcal{V}_\eta$ est un voisinage ouvert de $\bar{x}$, par continuité de F, qui est de plus stable par le flot de l'équation $X' = f(X)$. En effet , si $x_0 \in \mathcal{V}_\eta$, alors

$$F(X(t)) \leqslant F(x_0) < F(\bar{x}) + \epsilon$$

pour tout $t \geqslant 0$ dans l'intervalle maximal de définition de la solution. En particulier, on en déduit par définition de ϵ que $X(t) \in B(\bar{x}, \eta)$ et, comme $\overline{B}(\bar{x}, \eta)$ est un compact de Ω, le théorème 3.5 assure que la solution est définie pour tout temps $t \geqslant 0$.

La stabilité au sens de Lyapunov de $\bar{x}$ est alors vérifiée avec le voisinage $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_{\eta_0}$. On vient de voir que le point *(i)* était vérifié. Pour le point *(ii)*, on part du fait que pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de $\bar{x}$ il existe un $\eta \in]0, \eta_0]$ tel que $B(\bar{x}, \eta) \subset \mathcal{U}$. Le voisinage $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\eta$ convient alors puisque pour tout $x_0 \in \mathcal{V}_\eta$ et tout $t \geqslant 0$ on a $X(t) \in \mathcal{V}_\eta \subset B(\bar{x}, \eta) \subset \mathcal{U}$.

Supposons maintenant que F est une fonction de Lyapunov stricte et soit $x_0 \in \mathcal{V}_0 \backslash \{\bar{x}\}$. La fonction $t \mapsto F(X(t))$ est alors strictement décroissante et minorée par $F(\bar{x})$. Supposons par l'absurde que la trajectoire $X(t)$ ne converge pas vers $\bar{x}$. Alors $F(X(t))$ converge vers $\ell > F(\bar{x})$, puisque $\bar{x}$ est un minimum strict sur $\mathcal{V}_0$. Notons alors

$$\mathcal{W} = \{x \in \mathcal{V}_0,\ F(x) > \ell\} = \{x \in B(\bar{x}, \eta_0),\ \ell < F(x) < F(\bar{x}) + \epsilon\}.$$

Par compacité de $\overline{\mathcal{W}}$ et continuité de $\nabla F \cdot f$ nous avons pour tout $x \in \mathcal{W}$

$$\nabla F(x) \cdot f(x) \leqslant m := \max_{y \in \overline{\mathcal{W}}} \nabla F(y) \cdot f(y) < 0.$$

On en déduit que pour tout $t \geqslant 0$

$$\frac{d}{dt} F(X(t)) = \nabla F(X(t)) \cdot f(X(t)) \leqslant m,$$

qui conduit à

$$F(X(t)) \leqslant F(x_0) + mt \to -\infty \qquad \text{quand} \quad t \to +\infty$$

et donc une contradiction avec $F(X(t)) \geqslant F(\bar{x})$. $\square$

On donne maintenant une variante du théorème précédent, qui sous des hypothèses un peu plus forte garantit la stabilité exponentielle (avec un taux quantifié) de $\bar{x}$.

Théorème 3.17 (Lyapunov n°2)**.** *Soit $\bar{x}$ un point singulier du champ $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. On suppose qu'il existe un voisinage Ω' de $\bar{x}$ dans Ω et une fonction $F \in \mathcal{C}^2(\Omega', \mathbb{R})$ telle que*

(i) il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathrm{D}^2 F(\bar{x}) \geqslant \alpha\,\mathrm{Id}$ (c'est-à-dire $\mathrm{D}^2 F(\bar{x})(h, h) \geqslant \alpha \|h\|^2$ pour tout $h \in \mathbb{R}^d$),

(ii) il existe $\beta > 0$ tel que $\nabla F(x) \cdot f(x) \leqslant -\beta(F(x) - F(\bar{x}))$ pour tout $x \in \Omega'$.

Alors $\bar{x}$ est un point d'équilibre exponentiellement stable*, dans le sens où il existe un voisinage $\mathcal{V}_0$ de $\bar{x}$ et une constante $C_0 > 0$ tels que pour tout $x_0 \in \mathcal{V}_0$ et tout $t \geqslant 0$,*

$$\|X(t) - \bar{x}\| \leqslant C_0\, e^{-\beta t/2} \|x_0 - \bar{x}\|.$$

Démonstration. Tout d'abord on remarque que *(i)* assure que $\bar{x}$ est un minimum local strict. En reprenant les notations de la preuve du théorème 3.16, on déduit immédiatement de *(ii)* que F est une fonction de Lyapunov forte sur $B(\bar{x}, \eta_0)$, puisque $F(x) > F(\bar{x})$ pour $x \in B(\bar{x}, \eta_0) \backslash \{\bar{x}\}$.

Plus précisément, d'après *(i)* et la formule de Taylor à l'ordre 2, il existe $\eta_0 > 0$ tel que $\overline{B}(\bar{x}, \eta_0) \subset \Omega'$ et

$$F(x) - F(\bar{x}) \geqslant \frac{\alpha}{4} \|x - \bar{x}\|^2.$$

pour tout $x \in \overline{B}(\bar{x}, \eta_0)$. On a également, par Taylor reste intégral, que pour tout $x \in \overline{B}(\bar{x}, \eta_0)$

$$F(x) - F(\bar{x}) \leqslant \frac{1}{4} \left(\sup_{y \in \overline{B}(\bar{x}, \eta_0)} \|\mathrm{D}^2 F(y)\| \right) \|x - \bar{x}\|^2.$$

En gardant toujours les notations de la preuve du théorème 3.16, on a d'autre part en utilisant *(ii)* que pour tout $x_0 \in \mathcal{V}_0$ et tout $t \geqslant 0$

$$\frac{d}{dt}(F(X(t)) - F(\bar{x})) = \nabla F(X(t)) \cdot f(X(t)) \leqslant -\beta(F(X(t)) - F(\bar{x})),$$

qui donne immédiatement par intégration

$$F(X(t)) - F(\bar{x}) \leqslant (F(x_0) - F(\bar{x}))e^{-\beta t}.$$

On obtient donc finalement

$$\|X(t) - \bar{x}\|^2 \leqslant \frac{4}{\alpha}(F(X(t)) - F(\bar{x})) \leqslant \frac{4}{\alpha}(F(x_0) - F(\bar{x}))e^{-\beta t} \leqslant \frac{1}{\alpha} \left(\sup_{y \in \overline{B}(\bar{x}, \eta_0)} \|\mathrm{D}^2 F(y)\| \right) \|x - \bar{x}\|^2 e^{-\beta t}$$

qui donne le résultat en prenant la racine carrée. □

Un résultat remarquable de la théorie de Lyapunov est le théorème de linéarisation suivant.

Théorème 3.18 (Lyapunov n°3)**.** *Soit $\bar{x}$ un point singulier du champ $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. On suppose que la matrice jacobienne $\mathrm{D}f(\bar{x})$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative. Alors $\bar{x}$ est un point d'équilibre exponentiellement stable.*

Démonstration. On note $\|\cdot\|$ la norme hermitienne sur $\mathbb{C}^d$ muni du produit scalaire usuel ($\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$). Quitte à considérer la fonction $x \mapsto f(x - \bar{x})$, on peut se ramener au cas $\bar{x} = 0$. Notons alors $A = \mathrm{D}f(0)$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de A. En utilisant la décomposition $\mathbb{C}^d = \bigoplus \ker(A - \lambda_j)^{m_j}$ en sous-espaces caractéristiques de A, on peut écrire de manière unique tout x de $\mathbb{C}^d$ comme

$$x = x_1 + \cdots + x_k, \qquad x_j \in \ker(A - \lambda_j)^{m_j},$$

et définir sur $\mathbb{R}^d$ la norme

$$\|x\|_c = \max_{1 \leqslant j \leqslant k} \|x_j\|.$$

Chaque sous-espace caractéristique $\ker(A - \lambda_j)^{m_j}$ est stable par A, donc par e^{tA}, et

$$e^{tA} x_j = e^{t\lambda_j} e^{t(A - \lambda_j I)} x_j = e^{t\lambda_j} \left(\sum_{\ell=0}^{m_j - 1} \frac{t^\ell}{\ell!} (A - \lambda_j I)^\ell \right) x_j.$$

On en déduit alors facilement l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{C}^d$ et tout $t \geqslant 0$

$$\|e^{tA} x\|_c \leqslant C(1 + t)^{d-1} \left(\sum_{j=1}^{k} e^{t \operatorname{Re}(\lambda_j)} \right) \|x\|_c.$$

Par équivalence des normes, la même inégalité (avec une constante C différente) est également vraie pour la norme $\|\cdot\|$. Comme on a $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$ pour tout j, on peut trouver a vérifiant $0 < a < \min(-\mathrm{Re}(\lambda_j))$ et on a alors l'existence d'un $C_a > 0$ tel que

$$\|e^{tA}x\| \leqslant C_a\, e^{-at}\|x\|$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $t \geqslant 0$. Ainsi 0 est exponentiellement stable pour l'équation linéaire $X' = AX$. L'objectif maintenant est d'en déduire la stabilité exponentielle de 0 pour l'équation non-linéaire $X' = f(X)$ en exploitant le fait que $f(x) - Ax = f(x) - f(0) - \mathrm{D}f(0)(x)$ est petit quand x est proche 0. Pour cela on définit la forme bilinéaire symétrique b sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ par

$$b(x,y) = \int_0^\infty (e^{tA}x \cdot e^{tA}y)dt,$$

qui est bien une intégrale convergente puisque $|e^{tA}x \cdot e^{tA}y| \leqslant \|e^{tA}x\|\,\|e^{tA}y\| \leqslant C_a^2\|x\|\,\|y\|e^{-2at}$, et la forme quadratique q associée

$$q(x) = b(x,x) = \int_0^\infty \|e^{tA}x\|^2 dt$$

qui est clairement définie positive. Comme toute forme quadratique, q est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^d$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$), avec

$$\mathrm{D}q(x)(h) = 2b(x,h) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D}^2q(x)(h,k) = 2b(h,k).$$

On va maintenant montrer que $F = q$ est une fonction de Lyapunov pour f au voisinage de $\bar{x} = 0$ qui vérifie les points *(i)* et *(ii)* du Théorème 3.17, ce qui terminera la preuve. Pour cela on introduit la norme

$$\|x\|_q = \sqrt{q(x)}.$$

Pour vérifier le point *(i)* on écrit simplement que pour tout $h \in \mathbb{R}^d$

$$\mathrm{D}^2q(0)(h,h) = 2b(h,h) = 2q(h) = 2\|h\|_q^2 \geqslant \alpha\|h\|^2,$$

où on a utilisé l'équivalence des normes dans la dernière inégalité. Pour le point *(ii)* on commence par calculer

$$\begin{aligned}\nabla q(x)\cdot Ax &= \mathrm{D}q(x)(Ax) = 2b(x,Ax)\\ &= \int_0^\infty 2\big(e^{tA}x\big)\cdot\big(e^{tA}Ax\big)dt = \int_0^\infty \big(\|e^{tA}x\|^2\big)'dt = \Big[\|e^{tA}x\|^2\Big]_0^\infty = -\|x\|^2\end{aligned}$$

puis, en notant $r(x) = f(x) - Ax$,

$$\nabla q(x)\cdot f(x) = 2b(x,f(x)) = 2b(x,Ax) + 2b(x,r(x)) = -\|x\|^2 + 2b(x,r(x)) \leqslant -2\beta\|x\|_q + 2b(x,r(x)),$$

où on s'est à nouveau servi de l'équivalence des normes dans la dernière inégalité. On utilise ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la produit scalaire b, qui assure que

$$|b(x,r(x))| \leqslant \|x\|_q\|r(x)\|_q,$$

et le fait que $r(x)$ est petit quand x est proche de 0. Plus précisément, en écrivant la définition de la différentielle de f en 0 pour la norme $\|\cdot\|_q$ on a que

$$\|r(x)\|_q = \|f(x) - f(0) - \mathrm{D}f(0)(x)\|_q = o\big(\|x\|_q\big) \qquad \text{lorsque} \quad \|x\|_q \to 0.$$

On peut donc trouver un $\eta > 0$ tel que $\|x\|_q < \eta \implies \|r(x)\|_q \leqslant \beta/2$ et on a alors

$$\nabla q(x)\cdot f(x) \leqslant -\beta\|x\|_q^2 = -\beta(q(x) - q(0))$$

pour tout $x \in B_q(0,\eta) = \{y \in \mathbb{R}^d, \|y\|_q < \eta\}$, ce qui est exactement le point *(ii)* pour la fonction $F = q$ sur $\Omega' = B_q(0,\eta)$. $\square$