Université Paris Saclay
Cours commun à la 1ère année des Masters MINT et MMM

version du 12 janvier 2017 *P. Gabriel*

Introduction à l'analyse fonctionnelle et aux équations aux dérivées partielles

Table des matières

1 Espaces vectoriels normés (rappels) 3
1.1 Topologie des espaces vectoriels normés . . . 3
1.2 Applications linéaires continues . . . 5
1.3 Espaces de Banach . . . 6

2 Analyse hilbertienne 8
2.1 Espaces préhilbertiens et espaces de Hilbert . . . 8
2.2 Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens . . . 9
2.3 Projection orthogonale . . . 11
2.4 Deux résultats importants dans les Hilbert . . . 13
2.5 Bases hilbertiennes . . . 14

3 Distributions et espaces de Sobolev 16
3.1 Distributions . . . 16
3.2 Espaces de Sobolev . . . 20
3.3 Traces et formules de Green . . . 24

4 Exemples d'équations aux dérivées partielles 27
4.1 Équation de Poisson . . . 27
4.2 Élasticité linéaire . . . 29

Introduction

Le but de ce cours est d'introduire les bases d'analyse fonctionnelle nécessaires à l'étude de certaines équations aux dérivées partielles (stationnaires, de type elliptique).

Pour donner une idée des problèmes qui vont nous intéresser, considérons l'équation différentielle suivante

$$-u''(x) = f(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{1}$$

avec les conditions aux bord dites de Dirichlet $u(0) = u(1) = 0$, où f est une fonction continue donnée définie sur $[0,1]$. La question que l'on se pose est alors de savoir s'il existe une (unique) solution $u \in \mathcal{C}^2(0,1) \cap \mathcal{C}^0([0,1])$ à ce problème.

Celui-ci peut se résoudre explicitement en intégrant deux fois l'équation (1) et en utilisant les conditions aux bords. Cependant il existe une autre méthode qui consiste à reformuler le problème et qui aura l'avantage de pouvoir se généraliser à une plus grande classe d'équations aux dérivées partielles. Pour cela considérons une fonction $v \in \mathcal{C}^1(0,1) \cap \mathcal{C}^0([0,1])$ vérifiant les mêmes conditions aux brods que u, à savoir $v(0) = v(1) = 0$, et intégrons l'équation (1) contre v. On obtient grâce à une intégration par parties

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx. \tag{2}$$

On peut alors montrer que u est solution du problème de départ si et seulement si $u \in X := \{v \in \mathcal{C}^1(0,1) \cap \mathcal{C}^0([0,1]),\ v(0) = v(1) = 0\}$ et u vérifie (2) pour toute fonction test $v \in X$. C'est ce que l'on appelle la *formulation variationnelle* du problème.

Après des rappels sur les espaces vectoriels normés dans la première partie du cours, nous allons démontrer dans une deuxième partie un théorème qui permet d'assurer l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème variationnel, mais dans des espaces fonctionnels vérifiant des propriétés qui ne sont pas satisfaites par X. Ce qui nous amènera dans une troisième partie à définir les "bons" espaces de fonctions en faisant appel à la théorie des distributions. Enfin dans une quatrième partie nous allons étudier plus en détails des équations aux dérivées partielles classiques provenant de la mécanique.

1 Espaces vectoriels normés (rappels)

Définition 1.1 (Norme)**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une fonction $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ est appelée* norme *sur E si elle vérifie les conditions suivantes*

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E, \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$,

(ii) $\forall (x,y) \in E^2, \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$,

(iii) $\|x\| = 0 \implies x = 0$.

Le couple $(E, \|\cdot\|)$ est alors appelé espace vectoriel normé *(e.v.n.).*

1.1 Topologie des espaces vectoriels normés

Pour tout x dans un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ et $r > 0$ on note

$$B(x,r) := \{y \in E,\ \|x-y\| < r\} \qquad (\text{resp. } \overline{B}(x,r) := \{y \in E,\ \|x-y\| \leqslant r\})$$

la boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon r. Un sous-ensemble de E est dit borné s'il est inclus dans une boule.

Définition 1.2 (Ensemble ouvert/fermé)**.** *On dit que*

- *$U \subset E$ est* ouvert *si pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U$,*
- *$F \subset E$ est* fermé *si $E \backslash F$ est ouvert,*

Définition 1.3 (Intérieur, adhérence, frontière)**.** *Pour un ensemble $A \subset E$ on définit*

- *l'*intérieur *de A par $\mathring{A} := \{x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subset A\}$,*
- *l'*adhérence *de A par $\overline{A} := \{x \in E,\ \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing\}$,*
- *la* frontière *de A par $\partial A := \overline{A} \backslash \mathring{A}$.*

Exercice. Montrer que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A et que $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A. Ceci montre en particulier que A est ouvert (resp. fermé) ssi $\mathring{A} = A$ (resp. $\overline{A} = A$).
Exercice. Soit A un sous-ensemble non-vide d'un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$. Pour tout $x \in E$ on définit $d(x,E) := \inf\{\|x-y\|, y \in A\}$. Montrer que $x \in \overline{A} \iff d(x,A) = 0$.

Définition 1.4 (Densité)**.** *Un sous-ensemble A d'un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ est dit* dense *si $\overline{A} = E$.*

Définition 1.5 (Suites convergentes)**.** *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ est* convergente *s'il existe $x \in E$ tel que*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n \in B(x,\epsilon),$$

ou autrement dit

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|x_n - x\| < \epsilon.$$

On dit alors que x est la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x) et on note $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ (ou $x_n \to x$).

Proposition 1.6 (Caractérisation séquentielle de l'adhérence)**.** *L'adhérence $\overline{A}$ d'une partie A d'un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ est l'ensemble des limites des suites de A.*

Exercice. Soit F un sous-espace vectoriel d'un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$. Montrer que l'adhérence $\overline{F}$ de F est aussi un sous-espace vectoriel de E.

Définition 1.7 (Point d'adhérence)**.** *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments d'un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$, un* point d'adhérence *de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément $a \in E$ tel qu'il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a.*

Définition 1.8 (Compacité)**.** *On dit qu'un sous-ensemble K d'un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ est* compact *si toute suite d'éléments de K admet un point d'adhérence dans K.*

Exercice. Montrer en raisonnant par l'absurde que tout ensemble compact est fermé et borné.

Théorème 1.9. *Un sous-ensemble d'un espace vectoriel de dimension fini est compact si et seulement si il est fermé et borné.*

Remarque 1.10. *En fait un théorème dû à Riesz assure même qu'un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermé $\overline{B}(0,1)$ est compacte.*

Définition 1.11 (Relative compacité)**.** *On dit qu'un ensemble est* relativement compact *si son adhérence est compacte.*

Définition 1.12 (Continuité)**.** *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n. et soit une application $f : E \to F$. On dit que f est* continue *en $x \in E$ si pour tout ouvert U de F tel que $f(x) \in U$ on a que $f^{-1}(U)$ est ouvert dans E.*

Proposition 1.13. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., $f : E \to F$ et $x \in E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est continue en x ;*

(ii) $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in E,\ \|x - y\|_E < \eta \implies \|f(x) - f(y)\|_F < \epsilon$ *;*

(iii) *pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E qui converge vers x, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ dans F.*

Proposition 1.14. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n. et soit $f : E \to F$ une application continue. Si $K \subset E$ est compact alors $f(K)$ est compact dans F.*

Corollaire 1.15. *Si K est un sous-ensemble compact d'un e.v.n., alors toute fonction $f : K \to \mathbb{R}$ continue est bornée et atteint ses bornes.*

Définition 1.16 (Continuité uniforme)**.** *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n. et $f : E \to F$. On dit que f est une application* uniformément continue *si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in E^2,\ \|x - y\|_E < \eta \implies \|f(x) - f(y)\|_F < \epsilon.$$

Théorème 1.17 (Heine)**.** *Toute fonction continue sur un ensemble compact est uniformément continue.*

Démonstration. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n. et soit K un sous-ensemble compact de E. On raisonne par contraposée. Supposons que $f : K \to F$ n'est pas uniformément continue. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$ l'implication $\|x - y\|_E < \eta \implies \|f(x) - f(y)\|_F < \epsilon$ soit fausse pour certains x et y. En considérant $\eta = 1/n$ on peut donc construire deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|x_n - y_n\|_E < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \|f(x_n) - f(y_n)\|_F \geqslant \epsilon.$$

L'ensemble K étant compact, on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $l \in K$. La relation $\|x_n - y_n\|_E < \frac{1}{n}$ assure que la suite extraite $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers l. On en déduit que pour tout $\eta > 0$, il existe $x, y \in B(l, \eta)$ tels que $\|f(x) - f(y)\|_F \geqslant \epsilon$, et donc tels que $\|f(x) - f(l)\|_F \geqslant \epsilon/2$ ou $\|f(y) - f(l)\|_F \geqslant \epsilon/2$. La fonction f n'est donc pas continue au point $l \in K$. □

Définition 1.18 (Normes équivalentes)**.** *Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un espace vectoriel E sont dites* équivalentes *si*

$$\exists c, C > 0,\ \forall x \in E, \qquad c\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1.$$

Proposition 1.19. *Deux normes équivalentes définissent exactement la même topologie sur E (mêmes ensembles ouverts, fermés, compacts, mêmes suites convergentes, mêmes applications continues...).*

Proposition 1.20. *En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Exercice (Contre-exemple en dimension infinie). Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ qu'on munit des normes $\|u\|_1 = \int_a^b |u(t)|\, dt$ et $\|u\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |u(t)|$. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes comparables mais pas équivalentes.

1.2 Applications linéaires continues

Proposition 1.21. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n. et soit $L : E \to F$ linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) L est continue sur E ;

(ii) L est continue en 0 ;

(iii) $\exists C > 0,\ \forall x \in E,\ \|L(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$ (on dit aussi que L est bornée).

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires vérifiant ces propriétés.

⚠ $\mathcal{L}(E, F)$ dépend du choix des normes ! Par exemple si on considère $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, $F = \mathbb{R}$ et $L : f \mapsto f(0)$, alors $L \in \mathcal{L}(E, F)$ si on munit E de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$ mais pas si E est muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$.

Proposition 1.22. *Soient E et F deux e.v.n. avec E de dimension finie. Alors toute application linéaire de E dans F est continue.*

Proposition 1.23. *Si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n. alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un e.v.n. pour la norme*

$$\begin{aligned} |\!|\!| L |\!|\!|_{\mathcal{L}(E,F)} &:= \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} \\ &= \sup_{x \in E, \|x\| \leqslant 1} \|L(x)\|_F \\ &= \sup_{x \in E, \|x\| = 1} \|L(x)\|_F. \end{aligned}$$

Exercice. On considère $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ que l'on munit de la norme $\|u\|_1 = \int_0^1 |u(t)|\,dt$. Soit $L : E \to E$ l'application linéaire définie par $L(u)(t) = tu(t)$.

1. Montrer que $L \in \mathcal{L}(E, E)$ et que $|\!|\!| L |\!|\!| \leqslant 1$.
2. En s'aidant de la suite $u_n(t) = (n + 1)t^n$, montrer que $|\!|\!| L |\!|\!| = 1$.
3. Enfin prouver qu'il n'existe pas de $u \neq 0$ tel que $\|L(u)\| = \|u\|$.

Proposition 1.24. *On considère trois e.v.n. E, F et G. Si $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\Psi \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $\Psi \circ \Phi \in \mathcal{L}(E, G)$ et $|\!|\!| \Psi \circ \Phi |\!|\!|_{\mathcal{L}(E,G)} \leqslant |\!|\!| \Phi |\!|\!|_{\mathcal{L}(E,F)} |\!|\!| \Psi |\!|\!|_{\mathcal{L}(F,G)}$.*

Définition 1.25 (Forme linéaire)**.** *Une* forme linéaire *est une application linéaire d'un espace vectoriel E à valeur dans $\mathbb{K}$.*

Définition 1.26 (Hyperplan)**.** *Un* hyperplan *H d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de codimension 1, i.e. tel que $\exists a \in E \backslash 0,\ E = H \oplus \mathbb{K}a$.*

Proposition 1.27. *Les hyperplans d'un espace vectoriel sont les noyaux des formes linéaires non nulles. Si E est un e.v.n. et $H = \mathrm{Ker}(L)$, alors L est continue si et seulement si H est fermé.*

Démonstration.

- Soit $L : E \to \mathbb{K}$ linéaire non nulle et soit $a \in E,\ L(a) \neq 0$. On note $H = \mathrm{Ker}(L) = L^{-1}(0)$ le noyau de L. On a alors $E = H \oplus \mathbb{K}a$. En effet si $x \in E$ alors $h = x - \frac{L(x)}{L(a)}a$ est bien dans H ($L(h) = 0$) et on a donc $x = h + \lambda a$ avec $\lambda = \frac{L(x)}{L(a)}$, $h \in H$ et $\lambda a \in \mathbb{K}a$. D'autre part si $h = \lambda a \in H \cap \mathbb{K}a$, alors $L(h) = \lambda L(a) = 0$ et donc $\lambda = 0$ et $h = 0$. H est bien un hyperplan.
  Réciproquement si H est un hyperplan, il existe $a \neq 0$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}a$. Pour tout $x \in E$ il existe un unique $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = h + \lambda a$. On pose $L(x) = \lambda$. On a alors bien que L est une forme linéaire non nulle et que $H = \mathrm{Ker}(L)$.

- Si L est continue alors l'image réciproque des fermés est fermée, donc $H = L^{-1}(0)$ est fermé. Réciproquement supposons que H est fermé. Soit $\mathbb{K}a$ une droite supplémentaire. Si L n'est pas bornée alors il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\|x_n\| \leqslant 1$, $x_n \neq 0$ et $|L(x_n)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Posons $h_n = a - \frac{L(a)}{L(x_n)}x_n$. On a $h_n \to a$ et $h_n \in H$ $(L(h_n) = 0)$. Comme $a \notin H$, c'est une contradiction avec le fait que H est fermé. Donc L est bornée et donc continue.

□

Définition 1.28 (Dual topologique)**.** *On appelle* dual topologique *d'un e.v.n. E l'e.v.n. $E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.*

1.3 Espaces de Banach

Définition 1.29 (Suite de Cauchy)**.** *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ est une* suite de Cauchy *si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geqslant N,\ \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

Définition 1.30 (Complétude)**.** *Un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ est dit* complet *si toute suite de Cauchy de E converge dans E. Ces espace sont également appelés* espaces de Banach*.*

Proposition 1.31. *Les e.v.n. de dimension finie sont complets.*

Exercice (Contre-exemple en dimension infinie)**.** Montrer que $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas complet.

Théorème 1.32. *$(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Proposition 1.33. *Soient E un e.v.n et B un Banach. Alors $\mathcal{L}(E, B)$ est aussi un espace de Banach pour la norme des applications linéaires continues.*

Corollaire 1.34. *Si E est un e.v.n. alors E' est un Banach.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, B)$. On va montrer que (f_n) converge dans E en trois étapes : identifier la limite f ; vérifier que f appartient bien à $\mathcal{L}(E, B)$; montrer que f_n converge vers f pour la norme de $\mathcal{L}(E, B)$.

- Pour tout $x \in E$ on a $\|f_n(x) - f_m(x)\|_B \leqslant |||f_n - f_m|||_{\mathcal{L}(E,B)}\|x\|_E$. Donc $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans B. Elle converge donc vers une limite que l'on note $f(x)$.
- Pour tout $x \in E$, $y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $f_n(x + \lambda y) = \lambda f_n(x) + f_n(y)$ donc $\lim_{n\to\infty} f_n(\lambda x + y) = \lambda \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$. Donc f est bien linéaire. Soit maintenant $\epsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $|||f_n - f_m||| < \epsilon$ pour tous $n, m \geqslant N$. On a alors $\forall x \in E,\ \forall n, m \geqslant N,\ \|f_n(x) - f_m(x)\| < \epsilon\|x\|$. On garde n fixé et on fait tendre m vers l'infini pour obtenir $\|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \epsilon\|x\|$. Donc f est continue avec $|||f||| \leqslant \epsilon + |||f_n|||$.
- On a en fait aussi obtenu que $|||f_n - f||| \leqslant \epsilon$ et donc $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}(E, B)$.

□

Définition 1.35. *Soit E un e.v.n. et soit $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ une série dans E. Cette série est dite* normalement convergente *si la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \|x_n\|_E$ est convergente.*

Proposition 1.36. *Dans une Banach, les séries normalement convergentes sont convergentes.*

Remarque 1.37. *En fait on peut même montrer qu'un e.v.n. est un espace de Banach si et seulement si toute série normalement convergente et convergente.*

Théorème 1.38 (Prolongement des applications uniformément continues)**.** *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ en e.v.n. et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach. Soit A une partie dense de E et soit $f : A \to F$ une application uniformément continue. Alors il existe une unique application $\tilde{f} : E \to F$ continue qui prolonge f. De plus ce prolongement est uniformément continu.*

Démonstration. Unicité. Soient f_1 et f_2 deux prolongements continus de f. Soient $x \in E$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ telle que $x_n \to x$. On a pour tout n, $f_1(x_n) = f_2(x_n)$ donc en passant à la limite $f_1(x) = f_2(x)$.
Existence. Soient $x \in E$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ telle que $x_n \to x$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E. Comme f est uniformément continue, on a aussi $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans F qui est complet. Donc $f(x_n)$ converge vers une limite l qui est indépendante du choix de la suite (x_n). On pose alors $\tilde{f}(x) = l$. En passant à la limite dans la définition de l'uniforme continuité de f on obtient l'uniforme continuité de $\tilde{f}$. □

Théorème 1.39 (Banach, Picard)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et soit $f : E \to E$. On suppose que f est une contraction, i.e.*

$$\exists \theta \in (0,1),\ \forall (x,y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant \theta \|x - y\|.$$

Alors il existe un unique point fixe $x^* \in E$ pour f, i.e. un unique $x^* \in E$ tel que $f(x^*) = x^*$.

Démonstration. Soit $x_0 \in E$ et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie à partir de x_0 par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Par itération on obtient que $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \theta^n \|x_1 - x_0\|$. Pour tous $m > n$ on a alors

$$\|x_m - x_n\| \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leqslant \|x_1 - x_0\| \sum_{k=n}^{m-1} \theta^k \leqslant \frac{\theta^n}{1-\theta} \|x_1 - x_0\|.$$

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et, par complétude, elle converge vers un élément $x^* \in E$. Puisque f est continue on a $f(x^*) = x^*$ en passant à la limite dans $x_{n+1} = f(x_n)$. L'unicité est une conséquence directe de l'hypothèse de contraction. □

2 Analyse hilbertienne

2.1 Espaces préhilbertiens et espaces de Hilbert

Dans le cas réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), un produit scalaire sur un espace vectoriel est une forme bilinéaire symétrique définie positive. Dans le cas complexe ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), c'est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.

Définition 2.1 (Produit scalaire)**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit qu'une application $(\cdot,\cdot)$ de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ est un* produit scalaire *si*

(i) $\forall x, x', y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad (x + \lambda x', y) = (x, y) + \lambda(x', y)$,

(ii) $\forall x, y \in E, \quad (x, y) = \overline{(y, x)}$,

(iii) $\forall x \in E\backslash\{0\}, \quad (x, x) > 0$.

Muni de $(\cdot,\cdot)$, E est appelé espace préhibertien.

Proposition 2.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soit E un espace préhilbertien. Alors*

$$\forall x, y \in E, \qquad |(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration. Soient x et y dans E et soit θ un réel tel que $(x, y) = |(x, y)|e^{-i\theta}$. On définit $P(\rho) := (xe^{i\theta} + \rho y, xe^{i\theta} + \rho y)$ pour tout réel ρ. Puisque $P \geqslant 0$, le discriminant de l'équation $P(\rho) = 0$ est positif. Or comme

$$P(\rho) = (x, x) + 2\rho|(x, y)| + \rho^2(y, y)$$

cela donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Les cas d'égalité correspondent à un discriminant nul, ce qui revient à dire que P peut s'annuler. Autrement dit il existe ρ_0 tel que $xe^{i\theta} + \rho_0 y = 0$. □

Corollaire 2.3. *L'application qui à $x \in E$ associe $\|x\| := \sqrt{(x, x)} \in \mathbb{R}$ est une norme sur E. On dit que c'est la norme associée au produit scalaire.*

Démonstration. Le seul point qui ne soit pas immédiat est l'inégalité triangulaire. Or grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x, y) + \|y\|^2 \qquad (3)\\ &\leqslant \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2\\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2\\ &= (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

□

Remarque 2.4. *L'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que le produit scalaire est une forme bilinéaire* continue *pour sa norme associée.*

Proposition 2.5 (Identité de polarisation)**.** *Dans tout espace préhilbertien réel (resp. complexe) on a*

$$\forall x, y \in E, \qquad (x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

$$\textit{resp.} \qquad (x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - \|x - y\|^2 - i\|x - iy\|^2).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer (3) à y, $-y$, iy et $-iy$ et de combiner les égalités obtenues. □

Corollaire 2.6. *Soit E un espace préhilbertien et soit f une isométrie sur E. Alors*

$$\forall x, y \in E, \qquad (f(x), f(y)) = (x, y).$$

En suivant la preuve de l'identité de polarisation, on obtient aussi l'*identité du parallélogramme.*

Proposition 2.7 (Identité du parallélogramme)**.** *Si E est un espace préhilbertien, alors on a*

$$\forall x, y \in E, \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Définition 2.8. *Un espace préhilbertien complet pour la norme associée au produit scalaire est appelé* espace de Hilbert*.*

2.2 Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens

Dans toute cette partie E désigne un espace préhilbertien réel ou complexe.

Définition 2.9 (Orthogonalité)**.** *On dit que deux éléments x et y de E sont* orthogonaux *si $(x, y) = 0$. On note alors $x \perp y$.*

Théorème 2.10 (Pythagore)**.** *Supposons que $x \perp y$. Alors on a $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de (3). □

Définition 2.11. *Pour tout $x \in E$ on définit l'*orthogonal *de x par*

$$x^\perp := \{y \in E,\ (x, y) = 0\}.$$

Et plus généralement, pour tout sous-ensemble $A \neq \emptyset$ de E, on définit l'orthogonal de A par

$$A^\perp := \{y \in E,\ \forall x \in A,\ (x, y) = 0\}.$$

Proposition 2.12. *Pour tout $A \subset E$ non vide, l'ensemble $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E, et l'on a $A \cap A^\perp \subset \{0\}$.*

Démonstration. Montrons d'abord que $A^\perp$ est fermé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $A^\perp$ convergeant vers $x \in E$. On a pour tout $y \in A$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$|(x, y)| = |(x_n, y) + (x - x_n, y)| = |(x - x_n, y)| \leqslant \|x - x_n\|\|y\|.$$

Par convergence de la suite, le dernier terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini, et donc $x \in A^\perp$.
Montrons maintenant que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E. Il est évident que $A^\perp$ contient 0. Il suffit donc de vérifier que $A^\perp$ est stable par combinaisons linéaires, mais c'est une conséquence immédiate de la linéarité (ou sesquilinéarité) du produit scalaire.
Enfin si $A \cap A^\perp$ contient un élément x alors ce x est orthogonal à lui-même donc est nul. □

Proposition 2.13. *Pour tout sous-ensemble A de E on a*

$$\overline{A} \subset (A^\perp)^\perp.$$

Démonstration. Il est évident que $A \subset (A^\perp)^\perp$. De plus, d'après la proposition précédente, un orthogonal est toujours fermé, donc $(A^\perp)^\perp$ doit contenir l'adhérence de A. □

⚠ Si E est de dimension finie et F est un sous-espace vectoriel de E alors $F = (F^\perp)^\perp$ (exercice : le démontrer). Mais en dimension infinie l'inclusion $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$ peut être stricte. Nous reviendrons plus loin sur les cas d'égalité.

Définition 2.14 (Famille orthogonale/orthonormale)**.** *On dit qu'une famille* $(f_i)_{i\in I}$ *d'éléments de* E *est* orthogonale *si l'on a*

$$\forall i,j \in I, \quad i \neq i \implies (f_i, f_j) = 0.$$

On dit que $(f_i)_{i\in I}$ *est* orthonormale *si de plus* $\|f_i\| = 1$ *pour tout* $i \in I$.

Proposition 2.15. *Soit* $(f_1, \cdots, f_n)$ *une famille orthogonale constituée de vecteurs tous* non nuls. *Alors cette famille est libre.*

Démonstration. Supposons que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$. En prenant le produit scalaire de cette égalité avec x_j on obtient $\lambda_j \|f_j\|^2 = 0$. Or comme $f_j \neq 0$ on conclut que $\lambda_j = 0$. □

Proposition 2.16. *Soit* $(e_1, \cdots, e_n)$ *une famille orthonormale de* E *et soit* $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$. *Alors*

$$x = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i.$$

Démonstration. Par hypothèse il existe un n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. On en déduit que $(x, e_i) = \sum_{i=1}^n x_i (e_i, e_j) = x_j$. □

Corollaire 2.17. *Soit* $(e_1, \cdots, e_n)$ *une famille orthonormale de* E *et soient* x *et* y *deux éléments de* $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$. *Alors on a*

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n (x, e_i) \overline{(y, e_i)}.$$

En particulier on a

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2.$$

Démonstration. Si l'on note $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, un calcul immédiat donne $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$. D'après la proposition précédente on a $x_i = (x, e_i)$ et $y_i = (y, e_i)$, d'où le résultat. □

Proposition 2.18 (Inégalité de Bessel)**.** *Soit* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite orthonormale de* E *et soit* $x \in E$. *Alors la famille* $((x, e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est de carré sommable et on a l'inégalité*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a en utilisant le corollaire précédent

$$\begin{aligned}\left\| x - \sum_{n=0}^k (x, e_n) e_n \right\|^2 &= \left(x - \sum_{n=0}^k (x, e_n) e_n \, , \, x - \sum_{n=0}^k (x, e_n) e_n \right) \\ &= \|x\|^2 - 2 \sum_{n=0}^k |(x, e_n)|^2 + \sum_{n=0}^k |(x, e_n)|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{n=0}^k |(x, e_n)|^2.\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\sum_{n=0}^k |(x, e_n)|^2 \leqslant \|x\|^2$ puis on passe à la limite $k \to \infty$. □

Théorème 2.19 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)**.** *Soit* $(a_1, \cdots, a_n)$ *une famille libre de* E. *Alors il existe une unique famille orthonormale* $(e_1, \cdots, e_n)$ *telle que*

(i) $\forall j \in \{1, \cdots, n\}, \; \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_j) = \mathrm{Vect}(a_1, \cdots, a_j)$,

(ii) $\forall j \in \{1, \cdots, n\},\ (a_j, e_j) \in \mathbb{R}_*^+$.

Démonstration. On fait une récurrence limitée qu'on initialise en posant $e_1 = \frac{1}{\|a_1\|} a_1$. On a bien $\|e_1\| = 1$ et $(a_1, e_1) = \|a_1\| > 0$.
Supposons maintenant qu'on ait construit la famille $(e_1, \cdots, e_k)$ vérifiant (i) et (ii) pour $j \in \{1, \cdots, k\}$. Si $k = n$, la preuve est terminée. Sinon on cherche e_{k+1} sous la forme

$$e_{k+1} = \lambda\Big(a_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i\Big) \quad \text{avec } \lambda \neq 0.$$

Prenons le produit scalaire de cette égalité avec e_i (pour $i \in \{1, \cdots, k\}$). Pour que e_{k+1} soit orthogonal à e_i, il est nécessaire et suffisant que $(a_{k+1}, e_i) + \alpha_i = 0$. Donc

$$e_{k+1} = \lambda\Big(a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (a_{k+1}, e_i) e_i\Big).$$

Comme $a_{k+1} \notin \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ (car $(a_1, \cdots, a_{k+1})$ est libre), le terme entre parenthèses n'est pas nul. Pour rendre e_{k+1} de norme 1, il suffit donc de choisir $\lambda = \|a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (a_{k+1}, e_i) e_i\|^{-1}$. En conséquence

$$e_{k+1} = \frac{a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (a_{k+1}, e_i) e_i}{\|a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (a_{k+1}, e_i) e_i\|}.$$

En prenant le produit scalaire de e_{k+1} avec cette égalité, on obtient de plus

$$1 = \frac{(a_{k+1}, e_{k+1})}{\|a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (a_{k+1}, e_i) e_i\|},$$

ce qui montre que $(a_{k+1}, e_{k+1}) > 0$ et achève la preuve de l'existence.
L'unicité se démontre en reprenant la construction précédente et en vérifiant qu'à chaque étape il n'y a pas d'autre choix possible que celui que l'on a fait ci-dessus. □

En effectuant une récurrence complète, on obtient une version *infinie* du procédé d'orthonormalisation de Schmidt :

Théorème 2.20. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille libre de E. Alors il existe une unique famille orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que*

(i) $\forall j \in \mathbb{N},\ \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_j) = \mathrm{Vect}(a_1, \cdots, a_j)$,

(ii) $\forall j \in \mathbb{N},\ (a_j, e_j) \in \mathbb{R}_*^+$.

2.3 Projection orthogonale

Dans toute la suite H désigne un espace de Hilbert.

Théorème 2.21 (Projection sur un convexe fermé)**.** *Soit K un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert H. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique point $p_x \in K$ tel que*

$$\|x - p_x\| = d(x, K) := \inf_{y\in K} \|x - y\|.$$

Le point p_x est appelé projection *de x sur K. C'est l'unique point de K vérifiant*

$$\forall y \in K, \qquad \mathrm{Re}(x - p_x, y - p_x) \leqslant 0. \tag{4}$$

Démonstration. L'unicité vient du fait que si p_x et $p'_x \in K$ vérifient $\|x - p_x\| = \|x - p'_x\| = d(x, K)$, alors d'après l'*identité de la médiane* (conséquence facile de l'identité du parallélogramme) on a

$$\|x - p_x\|^2 + \|x - p'_x\|^2 = \frac{1}{2}\|p_x - p'_x\|^2 + 2\left\|x - \frac{p'_x + p_x}{2}\right\|^2$$

et donc

$$\|p'_x - p_x\|^2 = 4\left(d^2(x, K) - \Big\|x - \underbrace{\frac{p'_x + p_x}{2}}_{\in K}\Big\|^2\right) \leqslant 0$$

d'où $\|p'_x - p_x\| = 0$ puis $p'_x = p_x$.
Pour l'existence on note $d = d(x, K)$. Par définition il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ tel que $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = d$. D'après l'identité de la médiane, on a

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ \|x - x_m\|^2 + \|x - x_n\|^2 = \frac{1}{2}\|x_n - x_m\|^2 + 2\underbrace{\left\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2}_{\geqslant d}$$

donc

$$\frac{1}{2}\|x_n - x_m\|^2 \leqslant \|x - x_m\|^2 + \|x - x_n\|^2 - 2d^2.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, et sa limite p_x appartient à K car K est fermé.
Il ne reste plus qu'à vérifier (4). Soit $y \in K$. Pour tout $t \in [0, 1]$ on définit $y_t = p_x + t(y - p_x)$. Comme $y_t \in K$, on a

$$\|x - p_x\|^2 \leqslant \|x - y_t\|^2 = \|x - p_x\|^2 + t^2\|y - p_x\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}(x - p_x, p_x - y).$$

En faisant tendre t vers 0 on en déduit que $\mathrm{Re}(x - p_x, y - p_x) \leqslant 0$.
Réciproquement si $x_0 \in K$ vérifie $\mathrm{Re}(x - x_0, y - x_0) \leqslant 0$ pour tout $y \in K$, alors, puisque $\mathrm{Re}(x_0 - p_x, x - p_x) \leqslant 0$,

$$\|x_0 - p_x\|^2 = \mathrm{Re}(x_0 - p_x, x_0 - x) + \mathrm{Re}(x_0 - p_x, x - p_x) \leqslant 0$$

et donc $x_0 = p_x$. □

Corollaire 2.22. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Pour tout $x \in H$, la projection de x sur F est l'unique point p_x de F tel que $x - p_x \in F^\perp$.*

Démonstration. On a déjà vu que

$$\forall z \in F, \qquad \mathrm{Re}(x - p_x, z - p_x) \leqslant 0.$$

Pour $y \in F$ fixé, on a en prenant $z = p_x - y$ puis $z = p_x + y$ (et aussi $z = p_x \pm iy$ dans le cas complexe) que $(x - p_x, y) = 0$.
Soit p'_x un point de F tel que $x - p'_x \in F^\perp$. Comme $p'_x - p_x \in F$ on a $(x - p_x, p'_x - p_x) = 0$ et $(x - p'_x, p'_x - p_x) = 0$. Donc par soustraction $\|p'_x - p_x\|^2 = 0$, $p'_x = p_x$. □

Proposition 2.23. *Soit F un sous-espace vectoriel de H. Les trois énoncés suivant sont équivalents :*

(i) F *est fermé,*
(ii) $H = F \oplus F^\perp$,
(iii) $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration. $(i) \implies (ii)$. Supposons F fermé. Soit $x \in H$ et soit p_x sa projection sur F. On a $x = p_x + (x - p_x)$ avec $p_x \in F$ et $x - p_x \in F^\perp$.
$(ii) \implies (iii)$. Soit $x \in (F^\perp)^\perp$. On écrit $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$. On a donc $(x, z) = (y, z) + \|z\|^2$. Comme x est orthogonal à $F^\perp$, $(x, z) = 0$. Mais comme $y \in F$ et $z \in F^\perp$, $(y, z) = 0$. Donc $z = 0$, c'est-à-dire $x \in F$. Et donc $(F^\perp)^\perp \subset F$. Or comme on a toujours $F \subset (F^\perp)^\perp$, on a la conclusion.
$(iii) \implies (i)$. $F = (F^\perp)^\perp$, or un orthogonal est toujours fermé. □

Corollaire 2.24. *Pour tout sous-espace vectoriel F d'un Hilbert, on a $\overline{F} = (F^\perp)^\perp$.*

Démonstration. Il faut montrer $(F^\perp)^\perp \subset \overline{F}$. Comme $\overline{F}$ est fermé, on a par la proposition précédente que $\left(\overline{F}^\perp\right)^\perp = \overline{F}$. Mais comme $F \subset \overline{F}$, on a $F^\perp \supset (\overline{F})^\perp$ puis $(F^\perp)^\perp \subset \left(\overline{F}^\perp\right)^\perp = \overline{F}$. □

Définition 2.25. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Le sous-espace vectoriel $F^\perp$ est appelé* supplémentaire orthogonal *de F. Tout élément x de H se décompose de manière unique en*

$$x = y + z \quad \text{avec } y \in F \text{ et } z \in F^\perp.$$

Le vecteur y est le projeté orthogonal *de x sur F et l'application $x \mapsto y$ est appelée* projection orthogonale *sur F.*

Proposition 2.26. *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de H, et soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de F. Le projecteur orthogonal p sur F est donné par la formule*

$$\forall x \in H, \qquad p(x) = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i.$$

Démonstration. Il est clair que $\operatorname{Im} p = F$ et $\operatorname{Ker} p = F^\perp$. □

Corollaire 2.27. *Soit F un sous-espace vectoriel de H de dimension finie. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de F. Alors on a*

$$\forall x \in H, \quad d(x, F) = \left\| x - \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \right\|.$$

De plus l'unique point de F où cette distance est atteinte est $p(x) = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i$.

2.4 Deux résultats importants dans les Hilbert

Théorème 2.28 (Riesz-Fréchet)**.** *Soit H un Hilbert. Pour tout $f \in H'$, il existe un unique $x \in H$ tel que*

$$\forall y \in H, \qquad f(y) = (y, x).$$

De plus $\|x\| = \|f\|_{H'}$.

Démonstration. On commence par l'unicité. Si $f(y) = (y, x) = (y, x')$ pour tout $y \in H$, alors pour tout $y \in H$, $(y, x - x') = 0$, et donc $x - x' = 0$.
Pour l'existence on exclut le cas $f = 0$ qui est évident. Soit donc $f \in H' \backslash \{0\}$. Alors $\operatorname{Ker} f$ est un hyperplan fermé de H qui admet donc un supplémentaire orthogonal $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ non réduit à $\{0\}$. Soit $x_0 \in (\operatorname{Ker} f)^\perp \backslash \{0\}$. On a $f(x_0) \neq 0$ et

$$\forall y \in H, \quad y - \frac{f(y)}{f(x_0)} x_0 \in \operatorname{Ker} f.$$

On a donc

$$\forall y \in H, \quad (y, x_0) = \frac{f(y)}{f(x_0)} \|x_0\|^2.$$

On pose alors $x = \overline{\frac{f(x_0)}{\|x_0\|^2}} x_0$.
Enfin, puisque $f(y) = (y, x)$ pour tout $y \in H$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que $|f(y)| \leqslant \|x\| \|y\|$, et donc $\|f\|_{H'} \leqslant \|x\|$. Mais comme $f(x) = \|x\|^2$, on a en fait $\|f\|_{H'} = \|x\|$. □

Théorème 2.29 (Lax-Milgram)**.** *Soit H un Hilbert et soit $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue sur H. On suppose que a est* coercive, *c'est-à-dire*

$$\exists c_0 > 0,\ \forall x \in H, \quad \operatorname{Re} a(x,x) \geqslant c_0 \|x\|^2.$$

Alors pour tou $f \in H'$ il existe un unique $x \in H$ tel que

$$\forall y \in H, \qquad a(y,x) = f(y).$$

Démonstration. Comme a est continue, pour tout $x \in H$ l'application $y \mapsto a(y,x)$ est une forme linéaire continue sur H. Donc par le théorème de représentation de Riesz-Fréchet il existe un unique $A_x \in H$ tel que

$$\forall y \in H, \quad a(y,x) = (y, A_x).$$

Il est clair que $A : x \mapsto A_x$ est linéaire dans le cas réel et anti-linéaire dans le cas complexe. De plus, par continuité de a, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x \in H, \quad \|A_x\|^2 = (A_x, A_x) = a(A_x, x) \leqslant C\|A_x\|\|x\|.$$

Donc A est continue de H dans H. Par ailleurs, toujours d'après Riesz-Fréchet, il existe $x_0 \in H$ tel que

$$\forall y \in H, \quad f(y) = (y, x_0).$$

On est donc ramené à résoudre l'équation $A(x) = x_0$. Pour $\rho > 0$, considérons l'application

$$S_\rho : \left\{ \begin{array}{ccc} H & \rightarrow & H \\ x & \mapsto & x + \rho(x_0 - A(x)) \end{array} \right. .$$

Clairement, à ρ fixé, résoudre $A(x) = x_0$ revient à trouver un point fixe pour S_ρ. On a pour tout $x, x' \in H$

$$\|S_\rho(x) - S_\rho(x')\|^2 = \|x - x'\|^2 - 2\rho \operatorname{Re}\big(x - x', A(x - x')\big) + \rho^2 \|A(x - x')\|^2.$$

Donc en utilisant la coercivité de a et la continuité de A on a

$$\forall x, x' \in H, \quad \|S_\rho(x) - S_\rho(x')\|^2 \leqslant (1 - 2\rho c_0 + \rho^2 C^2)\|x - x'\|^2.$$

On choisit $\rho > 0$ suffisamment petit pour avoir $1 - 2\rho c_0 + \rho^2 C^2 < 1$ (par exemple $\rho = \frac{c_0}{C}$). Alors S_ρ est contractante et on conclut en appliquant le théorème de point fixe de Banach-Picard. □

2.5 Bases hilbertiennes

Théorème 2.30. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthogonale d'un espace de Hilbert H. Alors la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ converge dans H si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2 < \infty$, et dans ce cas on a l'*égalité de Parseval *:*

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2.$$

Démonstration. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$. Pour $p > n$, on a $S_p - S_n = \sum_{k=n+1}^{p} x_k$. Par orthogonalité de la famille $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on a donc

$$\|S_p - S_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{p} \|x_k\|^2.$$

Si l'on suppose que $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\|^2 < \infty$ alors le terme de droite tend vers 0 (uniformément en $p > n$) quand n tend vers l'infini, et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme H est complet, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Réciproquement si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $S \in H$, alors on a, toujours par orthogonalité des $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \|x_k\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|S_n\|^2 = \|S\|^2 < \infty.$$

Ce qui donne aussi Parseval. □

En combinant le résultat de ce théorème et l'inégalité de Bessel, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2.31. *Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale dans un espace de Hilbert H, et soit $x \in H$. Alors la série $\sum_{n\geqslant 0}(x, e_n)e_n$ converge dans H, et la norme de sa limite est inférieure à la norme de x.*

Définition 2.32 (Ensemble total)**.** *On dit qu'un sous-ensemble A d'un espace de Hilbert H est* total *si le sous-espace vectoriel* $\operatorname{Vect} A$ *engendré par A est dense dans H.*

Proposition 2.33. *Soit A un sous-ensemble d'un espace de Hilbert H. Alors A est totale si et seulement si $A^\perp = \{0\}$.*

Démonstration. Soit A total et soit $x \in A^\perp$. Alors par linéarité du produit scalaire par rapport à la première variable, on en déduit que x est aussi orthogonal à $\operatorname{Vect} A$, qui est dense dans H. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\operatorname{Vect} A$ qui converge vers x. On a $(x, x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc en passant à la limite $\|x\|^2 = 0$, *i.e.* $x = 0$.
Réciproquement supposons que $A^\perp = \{0\}$. Alors on a $(A^\perp)^\perp = H$. Or on vient de voir que $A^\perp = (\operatorname{Vect} A)^\perp$ donc en utilisant le corollaire 2.24 on obtient

$$\overline{\operatorname{Vect} A} = \left((\operatorname{Vect} A)^\perp\right)^\perp = \left(A^\perp\right)^\perp = H.$$

□

Remarque 2.34. *Comme cas particulier très important, on obtient qu'un sous-espace vectoriel F de H est dense si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.*

Définition 2.35 (Base hilbertienne)**.** *Soit H un espace de Hilbert et soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H. On dit que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une* base hilbertienne *de H si c'est une famille orthonormale et totale.*

Théorème 2.36. *Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale dans un espace de Hilbert H. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale ;*
(ii) $\forall x \in H,\ x = \sum_{n\in\mathbb{N}}(x, e_n)e_n$;
(iii) $\forall x \in H,\ \|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(x, e_n)|^2$.

Démonstration. $(i) \implies (ii)$. Soit $x \in H$. Posons $x_n = \sum_{k=1}^n (x, e_k)e_k$. On a d'après le théorème de Pythagore

$$(x, x_n) = \sum_{k=0}^{n} |(x, e_k)|^2 = \|x_n\|^2.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz on en déduit que $\|x_n\| \leqslant \|x\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc que la série $\sum_{k\geqslant 0} |(x, e_k)|^2$ est convergente, et ceci assure la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 0}(x, e_k)e_k$ (cf. théorème précédent). Si on note y la limite, on a par continuité du produit scalaire que pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
(y, e_m) &= \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (x, e_k)e_k\,,\ e_m\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (x, e_k)e_k\,,\ e_m\right) \\
&= (x, e_m).
\end{aligned}$$

On a donc $y - x \perp e_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et donc $y = x$ puisque $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est totale.
$(ii) \implies (iii)$. C'est une conséquence immédiate du théorème précédent appliqué à $x_n = (x, e_n)e_n$.
$(iii) \implies (i)$. Si $x \in (\operatorname{Vect}\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\})^\perp$, alors clairement $\|x\|^2 = 0$ et donc $x = 0$. □

3 Distributions et espaces de Sobolev

Dans toute la suite n est un entier strictement positif et Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.

3.1 Distributions

On rappelle que le support d'une fonction continue f est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel f est nulle, ou encore l'adhérence de l'ensemble des points où f est non nulle

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega,\ f(x) \neq 0\}}.$$

Définition 3.1. *On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur Ω, à valeurs réelles, qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact.*

Définition 3.2. *Pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ on note $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ sa longueur et on définit l'opérateur différentiel D^α sur $\mathcal{D}(\Omega)$ par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad D^\alpha \varphi : x = (x_1, \cdots, x_n) \mapsto D^\alpha \varphi(x) = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x).$$

Définition 3.3 ("Topologie" sur $\mathcal{D}(\Omega)$)**.** *On dit qu'une suite $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers une fonction φ de $\mathcal{D}(\Omega)$ si*

(i) il existe un compact $K \subset \Omega$ fixe qui contient le support de toutes les fonctions φ_p et de φ

(ii) pour tout multi-indice de dérivation $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la suite $(D^\alpha \varphi_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $D^\alpha \varphi$, i.e.

$$\lim_{p \to \infty} \|D^\alpha \varphi_p - D^\alpha \varphi\|_\infty = 0.$$

Exercice. Vérifier que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et pour tout multi-indice de dérivation α on a $D^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Montrer ensuite que $D^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ est continu.

Lemme 3.4. *L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p \in [1, \infty)$.*

Lemme 3.5. *Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_\Omega f(x) \varphi(x)\, dx = 0. \tag{5}$$

Alors $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \Omega$.

Démonstration. On admet ce résultat dans le cas général $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ mais on en donne une preuve dans le cas $f \in L^2(\Omega)$ qui utilise l'analyse hilbertienne. L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(f, g) = \displaystyle\int_\Omega fg$ et on a l'inclusion $\mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. On sait de plus que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ et donc son orthogonal est réduit à $\{0\}$. Or (5) signifie exactement que $f \in \mathcal{D}(\Omega)^\perp$, donc $f = 0$ dans $L^2(\Omega)$. ☐

Définition 3.6 (Distribution)**.** *Soit $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. On dit que T est une* distribution *si T est continue pour la topologie définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$, i.e. si pour toute suite $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a $\langle T, \varphi_p \rangle \xrightarrow[p \to \infty]{} \langle T, \varphi \rangle$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions sur Ω.*

Remarque 3.7. *Une distribution T étant une application linéaire, il suffit de vérifier que*

$$\varphi_p \xrightarrow[p \to \infty]{\mathcal{D}(\Omega)} 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \langle T, \varphi_p \rangle \xrightarrow[p \to \infty]{} 0.$$

Exemples.

1. Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. L'application T_f définie par

$$T_f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto & \langle T_f, \varphi \rangle = \displaystyle\int_\Omega f\varphi \end{array}$$

est une distribution. En effet si $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$ alors il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $\operatorname{supp}\varphi_p \subset K$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $\|\varphi_p\|_\infty \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$. En écrivant

$$|\langle T_f, \varphi_p \rangle| \leqslant \int_\Omega |f\varphi_p| = \int_K |f\varphi_p| \leqslant \|f\|_{L^1(K)} \|\varphi_p\|_\infty$$

on obtient donc que $\langle T_f, \varphi_p \rangle \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$.

Grâce au Lemme 3.5, l'application

$$\begin{array}{ccc} L^1_{loc} & \to & \mathcal{D}'(\Omega) \\ f & \mapsto & T_f \end{array}$$

est injective de sorte que $L^1_{loc}(\Omega)$ peut être vu comme un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Les espaces fonctionnels classiques, tels que $\mathcal{C}(\Omega)$ ou bien $L^p(\Omega)$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$, sont tous des sous-espaces de $L^1_{loc}(\Omega)$. Ainsi chaque fonction d'un de ces espaces peut être identifiée à une distribution.

2. La distribution de Dirac en un point $a \in \Omega$, notée δ_a et définie par

$$\delta_a : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto & \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) \end{array}$$

est une distribution. En effet

$$\varphi_p \xrightarrow[p\to\infty]{\mathcal{D}(\Omega)} 0 \implies \|\varphi_p\|_\infty \xrightarrow[p\to\infty]{} 0 \implies \forall x \in \Omega,\ \varphi_p(x) \xrightarrow[p\to\infty]{} 0 \implies \varphi(a) \xrightarrow[p\to\infty]{} 0.$$

C'est un exemple d'une distribution qui n'appartient pas à $L^1_{loc}(\Omega)$. En effet supposons par l'absurde qu'il existe $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $\delta_a = T_f$ et prenons $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. La fonction $\psi(x) = |x-a|^2\varphi(x)$ appartient elle aussi à $\mathcal{D}(\Omega)$ et s'annule en a, donc

$$0 = \psi(0) = \int_\Omega f(x)\psi(x) = \int_\Omega f(x)|x-a|^2\varphi(x).$$

On en déduit en utilisant le Lemme 3.5 que $|x-a|^2 f(x) = 0$ presque partout, et donc $f(x) = 0$ presque partout. Finalement on obtient que T_f est la distribution nulle, et ne peut donc pas être égale à δ_a. Ceci constitue une contradiction avec l'hypothèse de départ.

Lemme 3.8. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Le produit fT défini par l'application*

$$fT : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto & \langle fT, \varphi \rangle := \langle T, f\varphi \rangle \end{array}$$

est une distribution.

Démonstration. Tout d'abord le produit $f\varphi$ appartient bien à $\mathcal{D}(\Omega)$ donc la définition a un sens. Vérifions que fT est une distribution. Soit $\varphi_p \xrightarrow[p\to\infty]{\mathcal{D}} 0$ et soit $K \subset \Omega$ un compact tel que $\operatorname{supp}\varphi_p \subset K$ pour tout

$p \in \mathbb{N}$. On a alors d'une part que $\mathrm{supp}\{f\varphi_p\} \subset K$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, et d'autre part (en utilisant la formule de Leibniz) que pour tout multi-indice α

$$\|D^\alpha(f\varphi_p)\|_\infty = \Bigg\| \sum_{\substack{\beta,\gamma \\ \beta+\gamma=\alpha}} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f \, D^\gamma \varphi_p \Bigg\|_\infty \leqslant \sum_{\substack{\beta,\gamma \\ \beta+\gamma=\alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \|D^\beta f\|_\infty \|D^\gamma \varphi_p\|_\infty \xrightarrow[p\to\infty]{} 0,$$

où $\displaystyle\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i}$. Finalement on a prouvé que $f\varphi_p \xrightarrow[p\to\infty]{\mathcal{D}} 0$ et donc $\langle T, f\varphi_p\rangle \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$ puisque T est une distribution. □

Définition 3.9 (Dérivation d'une distribution)**.** *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice de dérivation. On appelle dérivée α-ième de T la distribution notée $D^\alpha T$ et définie par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle.$$

Exercice. Vérifier que $D^\alpha T$ ainsi définie est bien une distribution.

Exemple. Pour $a \in \mathbb{R}$, la dérivée de la distribution de Dirac δ_a est la distribution notée δ'_a et définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad \langle \delta'_a, \varphi\rangle = -\varphi'(a).$$

Lemme 3.10. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. Alors, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, la dérivée partielle $\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ de f au sens classique coïncide avec sa dérivée partielle au sens des distributions.*

Démonstration. Tout d'abord $f \in \mathcal{C}^1(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ donc f est bien une distribution T_f. De même sa dérivée au sens classique $\partial_i f \in \mathcal{C}^0(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ est bien une distribution $T_{\partial_i f}$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\langle \partial_i T_f, \varphi\rangle = -\langle T_f, \partial_i\varphi\rangle = -\int_\Omega f\partial_i\varphi.$$

Soit $K \subset \Omega$ le support de φ. Puisque f et $\partial_i\varphi$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur K, la formule de Green nous dit que

$$-\int_\Omega f\partial_i\varphi = -\int_K f\partial_i\varphi = \int_K \partial_i f\varphi - \underbrace{\int_{\partial K} f\varphi\, n_i}_{=0 \text{ car } \varphi=0 \text{ sur } \partial K} = \int_\Omega \partial_i f\varphi.$$

Ainsi $\langle \partial_i T_f, \varphi\rangle = \displaystyle\int_\Omega \partial_i f\varphi$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, ce qui signifie que $\partial_i T_f = T_{\partial_i f}$. □

Exercice. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}\backslash\{a\})$ telle que f' soit bornée sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$. Montrer que f admet une limite à gauche et à droite en a puis calculer la dérivée de f au sens des distributions. En déduire la dérivée au sens des distributions de la fonction de Heaviside $H(x) = \mathbb{1}_{x\geqslant 0}$.

Proposition 3.11. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que*

$$\nabla T := \begin{pmatrix} \partial_1 T \\ \vdots \\ \partial_n T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors T est constante sur chaque composante connexe de Ω.

Démonstration. On ne démontrera ce résultat que dans le cas $n = 1$ et $\Omega =]a,b[$. Montrons d'abord le

Lemme 3.12. *Si $\psi \in \mathcal{D}(]a,b[)$ alors*

$$\exists \varphi \in \mathcal{D}(]a,b[),\ \psi = \varphi' \quad \Longleftrightarrow \quad \int_a^b \psi(x)\,dx = 0.$$

Démonstration du Lemme 3.12. $\Longrightarrow$ Évident en intégrant.

$\Longleftarrow$ On veut montrer qu'une fonction de $\mathcal{D}(]a,b[)$ d'intégrale nulle est la dérivée d'une fonction de $\mathcal{D}(]a,b[)$. Posons $\varphi(x) = \displaystyle\int_a^x \psi(y)\,dy$. Il est clair que $\varphi' = \psi$ et que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(]a,b[)$. Pour montrer que φ est à support compact, on choisit un $\eta > 0$ tel que $\psi = 0$ sur $]a, a+\eta[\cup]b-\eta, b[$. On a alors que $\varphi' = 0$ et donc $\varphi = cste$ sur $]a, a+\eta[$ et sur $]b-\eta, b[$. Or comme $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ on en déduit que $\varphi = 0$ sur $]a, a+\eta[\cup]b-\eta, b[$.

□

Soit maintenant $T \in \mathcal{D}'(]a,b[)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(]a,b[), \qquad \langle T, \varphi' \rangle = 0.$$

On veut montrer que

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall \psi \in \mathcal{D}(]a,b[), \quad \langle T, \psi \rangle = \int_a^b C\psi(x)\,dx = C\int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Soit $\psi \in \mathcal{D}(]a,b[)$ et soit $\theta \in \mathcal{D}(]a,b[)$ telle que $\displaystyle\int_a^b \theta(x)\,dx = 1$. On décompose ψ sous la forme $\psi = c\,\theta + \tilde{\psi}$ avec $c = \displaystyle\int_a^b \psi$ de sorte que $\displaystyle\int_a^b \tilde{\psi} = 0$. On a alors grâce au Lemme 3.12 l'existence de $\tilde{\varphi}(]a,b[)$ telle que $\tilde{\varphi}' = \tilde{\psi}$ et par suite

$$\begin{aligned}\langle T, \psi \rangle &= c\langle T, \theta \rangle + \langle T, \tilde{\psi} \rangle \\ &= c\langle T, \theta \rangle + \underbrace{\langle T, \tilde{\varphi}' \rangle}_{=0} \\ &= \langle T, \theta \rangle \int_a^b \psi(x)\,dx.\end{aligned}$$

On a donc que $T = cste = \langle T, \theta \rangle$. □

Définition 3.13 (Convergence de distributions)**.** *Soit $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers T au sens des distributions si*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle T_p, \varphi \rangle \xrightarrow[p\to\infty]{} \langle T, \varphi \rangle.$$

On écrit alors $T_p \xrightarrow[p\to\infty]{\mathcal{D}'} T$.

Exercice. Vérifier que la suite $\left(\frac{1}{p}\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{p}]}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge au sens des distributions vers δ_0.

Lemme 3.14. *L'application $f \in L^2(\Omega) \mapsto T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est continue.*

Démonstration. On veut montrer que si $(f_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$ sont tels que $\|f_p - f\|_2 \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$, alors $T_{f_p} \xrightarrow[p\to\infty]{\mathcal{D}'} T_f$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$|\langle T_{f_p} - T_f, \varphi \rangle| = \left|\int_\Omega (f_p - f)\varphi\right| \leqslant \|f_p - f\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0.$$

□

Lemme 3.15. *La dérivation est une application linéaire continue de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans lui-même.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice et soit D^α l'application définie par

$$D^\alpha : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}'(\Omega) & \to & \mathcal{D}'(\Omega) \\ T & \mapsto & D^\alpha T \end{array}.$$

Montrons que cette application est continue. Soient $(T_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tels que $T_p \xrightarrow[p\to\infty]{\mathcal{D}'} T$. Il faut montrer que $D^\alpha T_p \xrightarrow[p\to\infty]{\mathcal{D}'} D^\alpha T$. Pour cela on écrit que si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors $D^\alpha\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et donc

$$\langle D^\alpha T_p, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T_p, D^\alpha\varphi\rangle \xrightarrow[p\to\infty]{} (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle = \langle D^\alpha T, \varphi\rangle.$$

□

3.2 Espaces de Sobolev

Définition 3.16. *On note $H^1(\Omega)$ l'ensemble défini par*

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega),\ \forall i \in \{1, \cdots, n\},\ \partial_i u \in L^2(\Omega)\right\}$$

où les dérivées sont comprises au sens des distributions. On munit cet espace du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{n}(\partial_i u, \partial_i v)_{L^2}.$$

La norme associée à ce produit scalaire est

$$\|u\|_{H^1} = \sqrt{\|u\|_{L^2}^2 + |u|_{H^1}^2}$$

où on a défini $|\cdot|_{H^1}$ la semi-norme de H^1 par $|u|_{H^1}^2 = \sum_{i=1}^{n}\|\partial_i u\|_{L^2}^2$.

Remarque 3.17. *L'espace H^1 est strictement inclus dans L^2. Pour s'en convaincre il suffit de considérer la fonction de Heaviside définie sur $]-1,1[$ et de se rappeler que $H' = \delta_0 \notin L^2(]-1,1[)$, ou bien encore la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ qui appartient à $L^2(]0,1[)$ mais dont la dérivée $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \notin L^2(]0,1[)$.*

Théorème 3.18. *L'espace H^1 est un espace de Hilbert.*

Démonstration. Il suffit de montrer que l'espace H^1 est complet. Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans H^1. Par définition de la norme sur H^1, elle est de Cauchy dans L^2 dont on sait que c'est un espace de Hilbert. Il existe donc $u \in L^2$ telle que $u_p \xrightarrow[p\to\infty]{L^2} u$. En raisonnant de la même façon sur chacun des $\partial_i u_p$, il existe des fonctions $v_i \in L^2$ telles que $\partial_i u_p \xrightarrow[p\to\infty]{L^2} v_i$.

On va maintenant montrer que $u \in H^1$ est que $u_p \xrightarrow{H^1} u$. D'une part on sait que

$$u_p \xrightarrow{L^2} u \quad \Longrightarrow \quad u_p \xrightarrow{\mathcal{D}'} u \quad \Longrightarrow \quad \partial_i u_p \xrightarrow{\mathcal{D}'} \partial u_i$$

et d'autre part

$$\partial_i u_p \xrightarrow{L^2} v_i \quad \Longrightarrow \quad \partial_i u_p \xrightarrow{\mathcal{D}'} v_i.$$

Par unicité de la limite dans $\mathcal{D}'$, on en déduit que $\partial_i u = v_i$ et donc $\partial_i u \in L^2$, de sorte que $u \in H^1$. Enfin, puisque $u_p \xrightarrow{L^2} u$ et $\partial_i u_p \xrightarrow{L^2} \partial_i u$, on en déduit également que $u_p \xrightarrow{H^1} u$. □

Le résultat suivant assure qu'en dimension $n = 1$, $H^1(\Omega) \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Théorème 3.19. *Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (borné ou non borné), et soit $u \in H^1(I)$. Alors il existe une fonction $\tilde{u} \in \mathcal{C}(\bar{I})$ telle que*

$$u = \tilde{u} \quad \textit{p.p. sur } I \qquad \textit{et} \qquad \forall x, y \in \bar{I}, \quad \tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)\, dt.$$

De plus l'injection $\begin{array}{ccc} H^1(I) & \to & \mathcal{C}(\bar{I}) \\ u & \mapsto & \tilde{u} \end{array}$ *est continue.*

Démonstration. On fixe $y_0 \in I$ et on pose $v(x) = \int_{y_0}^x u'(t)\, dt$. La fonction v est continue sur $\bar{I}$ comme on peut le voir en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|v(x) - v(y)| = \left| \int_y^x u'(t)\, dt \right| \leqslant \sqrt{\left| \int_y^x dt \right|} \sqrt{\left| \int_y^x |u'(t)|^2 dt \right|} \leqslant \sqrt{|x - y|}\, \|u'\|_{L^2}. \tag{6}$$

De plus sa dérivée au sens des distributions est égale à u'. En effet en appliquant le Théorème de Fubini on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$

$$\begin{aligned} \int_I v\varphi' = \int_I \left[\int_{y_0}^x u'(t)\, dt \right] \varphi'(x)\, dx &= -\int_a^{y_0} \int_x^{y_0} u'(t)\varphi'(x)\, dt dx + \int_{y_0}^b \int_{y_0}^x u'(t)\varphi'(x)\, dt dx \\ &= -\int_a^{y_0} u'(t) \int_a^t \varphi'(x)\, dx dt + \int_{y_0}^b u'(t) \int_t^b \varphi'(x)\, dx dt \\ &= -\int_I u'(t)\varphi(t)\, dt. \end{aligned}$$

On a donc $(u - v)' = 0$ et on en déduit grâce à la Proposition 3.11 qu'il existe une constant C telle que $u - v = C$ presque partout. La fonction $\tilde{u} = v + C$ a les propriétés désirées.

Montrons maintenant la continuité de l'injection. Soit $u \in H^1(I)$ et soit $\tilde{u}$ son représentant continu. Soit ensuite $x \in I$ et soient $c, d \in I$ tels que $c < x < d$ et $\min(1, |I|) \leqslant d - c \leqslant 1$. Soit enfin la fonction f définie sur $[c, d]$ par $f(x) = \displaystyle\int_c^x \tilde{u}(t)\, dt - \frac{x - c}{d - c} \int_c^d \tilde{u}(t)\, dt$. La fonction $\tilde{u}$ étant continue, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f(c) = f(d) = 0$. Donc d'après le Théorème de Rolle, il existe $y \in]c, d[$ tel que $f'(y) = 0$, *c-à-d* $\tilde{u}(y) = \displaystyle\frac{1}{d - c} \int_c^d \tilde{u}(t)\, dt$. En reprenant les calculs de (6) on obtient que

$$\tilde{u}(x) \leqslant \tilde{u}(y) + \sqrt{d - c}\, \|u'\|_{L^2} = \frac{1}{d - c} \int_c^d \tilde{u}(t)\, dt + \sqrt{d - c}\, \|u'\|_{L^2} \leqslant \frac{1}{\min(1, |I|)} \int_c^d \tilde{u}(t)\, dt + \|u'\|_{L^2}$$

puis en utilisant à nouveau Cauchy-Schwarz,

$$\tilde{u}(x) \leqslant \frac{\sqrt{d - c}}{\min(1, |I|)} \|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2} \leqslant \frac{1}{\min(1, |I|)} \|u\|_{H^1}$$

et enfin en prenant le sup en x

$$\|\tilde{u}\|_\infty \leqslant \frac{1}{\min(1, |I|)} \|u\|_{H^1}.$$

□

Remarque 3.20. *Dès la dimension $n = 2$ l'inclusion $H^1(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega)$ n'est plus vraie. Pour s'en convaincre il suffit de considérer $\Omega = B(0, 1/2) \subset \mathbb{R}^2$ et de vérifier que la fonction définie par $u(x) = \left(\ln \dfrac{1}{|x|} \right)^{1/4}$ appartient à $H^1(\Omega)$ mais n'est pas continue en $x = 0$.*

Théorème 3.21 (Rellich-Kondrachov). *Soit I est un intervalle ouvert et borné de $\mathbb{R}$. Alors l'injection $H^1(I) \subset \mathcal{C}(\bar{I})$ est compacte.*
Pour $n \geqslant 1$, soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert borné de frontière lipschitzienne. Alors l'injection $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ est compacte.

Définition 3.22. *On note $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, i.e.*

$$H_0^1(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1} = \Big\{u \in H^1(\Omega),\ \exists (u_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega),\ \|u_p - u\|_{H^1} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0\Big\}.$$

Cet espace est par définition un sous-ensemble fermé de $H^1(\Omega)$ et donc un espace complet pour la norme $\|\cdot\|_{H^1}$. On en déduit que H_0^1 un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{H^1}$.
Dans le cas d'un ouvert **borné**, le résultat suivant nous dit que la forme bilinéaire $(u,v)_{H_0^1} := \sum_{i=1}^n (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2}$ est un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$. Sa norme associée est la semi-norme de H^1 : $\|u\|_{H_0^1} = |u|_{H^1}$.

Théorème 3.23 (Inégalité de Poincaré). *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ (ou au moins borné dans une direction). Alors il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que du domaine Ω telle que*

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \qquad \|u\|_{L^2} \leqslant C|u|_{H^1}.$$

Démonstration. Supposons tout d'abord l'inégalité vraie pour les fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ et montrons qu'elle est alors vraie pour les fonctions de $H_0^1(\Omega)$. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ et soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $u_p \xrightarrow[p\to\infty]{H^1} u$. On a par hypothèse que $\|u_p\|_{L^2} \leqslant C|u_p|_{H^1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui donne par passage à la limite $\|u\|_{L^2} \leqslant C|u|_{H^1}$. En effet la convergence dans H^1 implique la convergence pour la norme L^2 et pour la semi-norme H^1.

Montrons donc l'inégalité de Poincaré pour les fonctions $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Soit $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ et soit $\tilde{u}$ sont prolongement par 0 en dehors de Ω, de sorte que $\tilde{u} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Supposons que Ω soit borné dans la direction x_n et écrivons

$$\|u\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}(x)|^2\,dx = \int\!\!\cdots\!\!\int_{x_1\cdots x_n} |\tilde{u}(x_1,\cdots,x_n)|^2\,dx_1\cdots dx_n = \int_a^b \left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\tilde{u}(x',x_n)|^2\,dx'\right] dx_n.$$

La fonction $\tilde{u}$ étant régulière et puisque $\tilde{u}(x',a) = 0$ pour tout $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, on peut écrire

$$\forall x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \forall x_n \in [a,b], \qquad \tilde{u}(x',x_n) = \int_a^{x_n} \partial_n \tilde{u}(x',t)\,dt.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\tilde{u}(x',x_n)|^2 \leqslant (x_n - a)\int_a^{x_n} |\partial_n \tilde{u}(x',t)|^2\,dt \leqslant (b-a)\int_a^b |\partial_n \tilde{u}(x',t)|^2\,dt$$

En intégrant par rapport à la variable x' dans $\mathbb{R}^{n-1}$ il vient donc

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\tilde{u}(x',x_n)|^2\,dx' \leqslant (b-a)\|\partial_n \tilde{u}\|_{L^2}^2,$$

puis en intégrant par rapport à x_n,

$$\|u\|_{L^2}^2 \leqslant (b-a)^2\|\partial_n u\|_{L^2}^2 \leqslant (b-a)^2|u|_{H^1}^2.$$

On a donc montré l'inégalité de Poincaré avec la constante $C = b - a$. $\square$

Corollaire 3.24. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné (au moins dans une direction). Alors la semi-norme $|\cdot|_{H^1}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme induite par celle de $H^1(\Omega)$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ est donc un espace de Hilbert pour le produit scalaire "réduit"*

$$(u,v)_{H_0^1} = (\nabla u, \nabla v)_{[L^2(\Omega)]^n} = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2}.$$

Démonstration. Il suffit d'écrire que grâce à l'inégalité de Poincaré on a pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$

$$|u|_{H^1}^2 \leqslant \|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + |u|_{H^1}^2 \leqslant (1+C^2)|u|_{H^1}^2.$$

□

Remarque 3.25. *Si Ω est borné, en choisissant $u = cste \neq 0$, on voit que l'inégalité de Poincaré est fausse dans H^1 car $\|u\|_{L^2} > 0$ et $|u|_{H^1} = 0$. Cet exemple montre au passage que $H_0^1 \subsetneq H^1$ en général puisque si Ω est borné alors $u = \{cste \neq 0\} \in H^1(\Omega) \backslash H_0^1(\Omega)$. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ en revanche on a le résultat suivant (admis).*

Lemme 3.26. *L'ensemble $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^n)$. Autrement dit*

$$H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n).$$

Si Ω est un ouvert de frontière lipschitzienne, alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Le lemme suivant donne un résultat utile sur le prolongement par zéro d'une fonction de $H_0^1(\Omega)$.

Lemme 3.27. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $u \in H_0^1(\Omega)$. La fonction $\tilde{u}$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par*

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & si\ x \in \Omega \\ 0 & si\ x \notin \Omega \end{cases}$$

appartient à $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Pour toute fonction f définie sur Ω on note $\tilde{f}$ son prolongement par zéro en dehors de Ω. Il est facile de voir que si $u \in L^2(\Omega)$ alors $\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Soit maintenant $u \in H_0^1(\Omega)$. On veut montrer que $\tilde{u} \in H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ on a $\partial_i \tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
Par définition de $H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $u_p \xrightarrow[p\to\infty]{H^1} u$. On a alors d'une part

$$u_p \xrightarrow{L^2} u \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{u_p} \xrightarrow{L^2} \tilde{u} \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{u_p} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \tilde{u} \quad \Longrightarrow \quad \partial_i \widetilde{u_p} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \partial_i \tilde{u}$$

et d'autre part

$$\partial_i u_p \xrightarrow{L^2} \partial_i u \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{\partial_i u_p} \xrightarrow{L^2} \widetilde{\partial_i u} \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{\partial_i u_p} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \widetilde{\partial_i u}.$$

Or pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $u_p \in \mathcal{D}(\Omega)$ et donc $\widetilde{u_p} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, avec $\partial_i \widetilde{u_p} = \widetilde{\partial_i u_p}$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$. Par unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ on obtient finalement que $\partial_i \tilde{u} = \widetilde{\partial_i u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, et donc que $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$. □

Pour terminer ce paragraphe, nous donnons sans démonstration quelques résultats sur les espaces de Sobolev d'ordre supérieur.

Définition 3.28. *Pour $m \in \mathbb{N}$ on note $H^m(\Omega)$ l'ensemble défini par*

$$H^m(\Omega) = \big\{ u \in L^2(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leqslant m \implies D^\alpha u \in L^2(\Omega) \big\}.$$

On munit cet espace du produit scalaire

$$(u,v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \big(D^\alpha u, D^\alpha v \big)_{L^2}.$$

La norme associée est

$$\|u\|_{H^m} = \sqrt{\sum_{|\alpha|\leqslant m} \left\|D^\alpha u\right\|_{L^2}^2}$$

et on définit également la semi-norme

$$|u|_{H^m} = \sqrt{\sum_{|\alpha|=m} \left\|D^\alpha u\right\|_{L^2}^2}$$

Théorème 3.29. *L'espace H^m est un espace de Hilbert.*

Théorème 3.30. *Si Ω est un ouvert de frontière lipschitzienne et si $m > \frac{n}{2}$, alors $H^m(\Omega)$ s'injecte continûment dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$.*

En particulier en dimension $n \leqslant 3$, l'espace $H^2(\Omega)$ s'injecte continûment dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Théorème 3.31 (Rellich-Kondrachov)**.** *Soit Ω un ouvert borné de frontière lipschitzienne. Si $m > \frac{n}{2}$, alors l'injection $H^m(\Omega) \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ est compacte.*

Théorème 3.32. *On note $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$. Si Ω est borné, alors la semi-norme $|\cdot|_{H^m}$ est une norme sur $H_0^m(\Omega)$ équivalente à la norme induite par celle de $H^m(\Omega)$ et $H_0^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$(u, v)_{H_0^m} = \sum_{|\alpha|=m} \big(D^\alpha u, D^\alpha v\big)_{L^2}.$$

Lemme 3.33. *L'ensemble $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}^n)$. Autrement dit*

$$H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n).$$

Si Ω est un ouvert de classe $\mathcal{C}^m$, alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$.

3.3 Traces et formules de Green

Dans ce paragraphe nous allons généraliser à $H^1(\Omega)$ la notion de trace sur $\Gamma = \partial\Omega$ qui est naturellement définie pour une fonction $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Dans le cas où Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$, la question est réglée par le Théorème 3.19. Pour les dimensions supérieures, nous allons commencer par traiter le cas du demi-espace $\Omega = \mathbb{R}_+^n := \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 0\}$ puis nous énoncerons le cas général d'un ouvert Ω à frontière lipschitzienne.

Proposition 3.34. *Soit $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$. Alors on a $u_{|\Gamma} := u(\cdot, 0) \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ et*

$$\|u_{|\Gamma}\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant \|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^n)}.$$

Démonstration. Pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ on a

$$u^2(x', 0) = -\int_0^{+\infty} \frac{\partial(u^2)}{\partial x_n}(x', x_n)\, dx_n = -2\int_0^\infty u\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', x_n)\, dx_n \leqslant \int_0^\infty u^2(x', x_n)\, dx_n + \int_0^\infty \Big(\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big)^2(x', x_n)\, dx_n.$$

En intégrant par rapport à x' on obtient directement

$$\|u(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}^2 \leqslant \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leqslant \|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^n)}^2.$$

□

Théorème 3.35 (Trace)**.** *Il existe une unique application linéaire* $\gamma_0 : H^1(\mathbb{R}^n_+) \to L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ *telle que*

$$\forall u \in H^1(\mathbb{R}^n_+), \quad \|\gamma_0 u\|_{L^2} \leqslant \|u\|_{H^1} \qquad \text{et} \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+}), \quad \gamma_0 u = u_{|\Gamma}.$$

Démonstration. Soit l'application linéaire $\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+}) & \to & L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \\ u & \mapsto & u(\cdot, 0) \end{array}$. D'après le résultat précédent, cette application linéaire est continue si on munit l'espace de départ de la norme sur $H^1(\mathbb{R}^n_+)$. Elle est donc uniformément continue sur une partie dense de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ (cf. Lemme 3.26), qui est un espace de Hilbert. On déduit alors du Théorème 1.38 l'existence d'un unique prolongement continu $\gamma_0 : H^1(\mathbb{R}^n_+) \to L^2(\mathbb{R}^{n-1})$.
Il reste à vérifier que ce prolongement est linéaire et de norme inférieure à 1. Soient $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Par densité il existe deux suites $(u_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ et $(u_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ telles que $\|u_p - u\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$ et $\|u_p - u\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a

$$\gamma_0(u_p + \lambda v_p) = (u_p + \lambda v_p)(\cdot, 0) = u_p(\cdot, 0) + \lambda v_p(\cdot, 0) = \gamma_0 u_p + \lambda \gamma_0 v_p.$$

En passant à la limite $p \to +\infty$ et en utilisant la continuité de γ_0 on obtient $\gamma_0(u + \lambda v) = \gamma_0 u + \lambda \gamma_0 v$, et donc la linéarité de γ_0 sur $H^1(\mathbb{R}^n_+)$. De même en passant à la limite dans $\|\gamma_0 u_p\|_{L^2} \leqslant \|u_p\|_{H^1}$ on obtient $\|\gamma_0 u\|_{L^2} \leqslant \|u\|_{H^1}$. □

Plus généralement on a le résultat suivant que l'on admettra.

Théorème 3.36. *On suppose que* Ω *est à frontière lipschitzienne. Alors il existe une unique application linéaire continue* $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ *telle que pour toute fonction* $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *on ait* $\gamma_0 u = u_{|\Gamma}$*. De plus on a*

1. $\operatorname{Ker} \gamma_0 = H^1_0(\Omega)$,
2. $\gamma_0\big(H^1(\Omega)\big) \subsetneq L^2(\Gamma)$,
3. $\overline{\gamma_0\big(H^1(\Omega)\big)} = L^2(\Gamma)$.

On note $H^{1/2}(\Gamma) := \gamma_0\big(H^1(\Omega)\big)$.

Le résultat suivant montre qu'on peut étendre la validité de l'inégalité de Poincaré à des sous espaces de $H^1(\Omega)$ plus gros que le noyau de γ_0. Il suffit en fait d'imposer que les fonctions soient nulles sur une partie seulement du bord de Ω.

Théorème 3.37 (Inégalité de Poincaré)**.** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné connexe de frontière lipschitzienne et soit* Γ_0 *une partie de la frontière* Γ *de* Ω *de mesure non nulle. Soit* V *le sous-espace fermé de* $H^1(\Omega)$ *défini par*

$$V := \{u \in H^1(\Omega),\ \gamma_0 u = 0 \ \text{sur } \Gamma_0\}.$$

Alors il existe une constante $C > 0$ *telle que*

$$\forall u \in V, \qquad \|u\|_{L^2} \leqslant C |u|_{H^1}.$$

Par conséquent la semi-norme $|\cdot|_{H^1}$ *est une norme sur* V *équivalente à la norme induite par celle de* $H^1(\Omega)$.

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant que l'inégalité de Poincaré n'est pas vérifiée. Dans ce cas il existe une suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V satisfaisant $\|u_p\|_{L^2} = 1$ et $|u_p|_{H^1} \leqslant \frac{1}{p}$. On a alors $\|u_p\|_{H^1} \leqslant \sqrt{1 + \frac{1}{p}} \leqslant \sqrt{2}$ et, comme $H^1(\Omega)$ s'injecte compactement dans $L^2(\Omega)$ par Rellich, il existe une sous-suite$(u_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $L^2(\Omega)$ vers une limite u qui vérifie de plus $\|u\|_{L^2} = 1$. D'autre part on tire de l'inégalité $|u_p|_{H^1} \leqslant \frac{1}{p}$ que $\nabla u_{\varphi(p)} \to 0$ dans $L^2(\Omega)$ et donc dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Or la convergence de $u_{\varphi(p)} \to u$ dans $L^2(\Omega)$ entraîne la convergence $\nabla u_{\varphi(p)} \to \nabla u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. On obtient donc que $\nabla u = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et donc $u = cste$ sur Ω qui est connexe. Mais on tire aussi de $\nabla u = 0$ et de la convergence $\nabla u_{\varphi(p)} \to 0$ dans $L^2(\Omega)$ que $(u_{\varphi(p)})$ converge en fait vers u dans $H^1(\Omega)$. Comme V est fermé on en déduit que $u \in V$ et donc $u = 0$. Ceci une contradiction avec le fait que $\|u\|_{L^2} = 1$. □

Définition 3.38. *Soit Ω un ouvert de frontière lipschitzienne. Pour tout fonction $u \in H^2(\Omega)$ on note*

$$\gamma_1 u = \sum_{i=1}^{n} \gamma_0(\partial_i u)\nu_i$$

où $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$ est le vecteur normal à Γ orienté vers l'extérieur et de norme 1.
L'application $\gamma_1 : H^2(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ est continue, comme composée d'applications continues.

Si Ω est un ouvert de classe $\mathcal{C}^2$, l'application γ_0 envoie $H^2(\Omega)$ dans $H^1(\Gamma)$. Autrement dit la trace $\gamma_0 u$ admet des dérivées tangentielles, et on a le résultat suivant.

Théorème 3.39. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$.*
Alors le noyau de l'application $\begin{array}{ccc} H^2(\Omega) & \to & L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma) \\ u & \mapsto & (\gamma_0 u, \gamma_1 u) \end{array}$ *est $H_0^2(\Omega)$.*

Nous terminons ce chapitre par des formules de Green dans les espaces de Sobolev.

Théorème 3.40 (Formule de Green)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière lipschitzienne. Alors pour tous $u, v \in H^1(\Omega)$ et pour tout $i = 1, \cdots, n$ on a*

$$\int_\Omega \partial_i u \, v = -\int_\Omega u \, \partial_i v + \int_\Gamma \gamma_0 u \, \gamma_0 v \, \nu_i.$$

Corollaire 3.41. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière lipschitzienne. Alors pour tout $u \in H^2(\Omega)$ et tout $v \in H^1(\Omega)$ on a*

$$\int_\Omega \Delta u \, v = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Gamma \gamma_1 u \, \gamma_0 v.$$

4 Exemples d'équations aux dérivées partielles

4.1 Équation de Poisson

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière lipschitzienne. On considère le problème suivant : étant donné une fonction $f \in L^2(\Omega)$, trouver une fonction u définie sur Ω et solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{7}$$

Il faut tout d'abord préciser le sens que l'on donne à cette équation. Le plus simple *a priori* est de dire que les deux équations doivent être vérifiées presque partout, ou de manière équivalente que ce sont des égalités dans L^2. Cette première idée naturelle amène la définition suivante.

Définition 4.1 (Solution classique)**.** *On appelle* solution classique *de* (7) *toute fonction* $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *telle que*

$$-\Delta u(x) = f(x) \qquad \text{pour presque tout } x \in \Omega.$$

Maintenant si u est une solution classique de (7), la relation $-\Delta u = f$ qui a lieu dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ est équivalente à

$$\forall v \in F, \qquad -\int_\Omega \Delta u \, v = \int_\Omega f v,$$

où F est un sous-espace vectoriel dense de $L^2(\Omega)$. Prenons $F = H_0^1(\Omega)$. La formule de Green nous dit alors que l'on a de manière équivalente

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f v. \tag{8}$$

Cette dernière écriture est appelée *formulation variationnelle* du problème (7). Elle a plusieurs avantages comme nous allons le voir plus bas. Le premier avantage est qu'elle nécessite moins de régularité sur u que la formulation initiale, et permet donc de chercher des solutions dans un espace plus gros que $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. On définit alors une nouvelle notion de solution.

Définition 4.2 (Solution faible)**.** *On appelle* solution faible *de* (7) *toute fonction* $u \in H_0^1(\Omega)$ *vérifiant la formulation variationnelle* (8)*.*

Théorème 4.3. *Toute solution classique de* (7) *est solution faible, et réciproquement.*

Démonstration. On a déjà vérifié que toute solution classique était solution faible. Il ne reste donc à montrer que la réciproque.

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ une solution faible de (7). Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, la formulation variationnelle (8) est équivalente à

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega f \varphi,$$

qui donne en utilisant la formule de Green

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad -\int_\Omega u \, \Delta \varphi = \int_\Omega f \varphi.$$

Par conséquent u vérifie l'identité $-\Delta u = f$ au sens des distributions, et comme $f \in L^2(\Omega)$ cette identité est vérifiée dans $L^2(\Omega)$, donc presque partout sur Ω. Il reste encore à vérifier que $u \in H^2(\Omega)$ pour pouvoir conclure que u est une solution classique. Pour le moment on sait que $u \in H_0^1(\Omega)$ et que $\Delta u \in L^2(\Omega)$. Tout d'abord on utilise le lemme 3.27 pour dire que, comme $u \in H_0^1(\Omega)$, son prolongement par zéro que l'on notera encore u appartient à $H_0^1(\mathbb{R}^n)$. Soit maintenant une approximation de l'unité $(\rho_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et soit $u_p = \rho_p * u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On a alors $u_p \to u$ dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ et $\Delta u_p = \rho_p * \Delta u \to \Delta u$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Or en appliquant les formules de Green et en utilisant que $u_p \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\begin{aligned}
\|\Delta u_p\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u_p \Delta u_p &= -\int_{\mathbb{R}^n} \nabla(\Delta u_p) \nabla u_p \\
&= -\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta u_p \frac{\partial}{\partial x_i} u_p \\
&= -\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_j^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} u_p \\
&= -\sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_j \partial x_i} = \sum_{i,j} \|\partial_i \partial_j u_p\|_{L^2}^2 \geqslant |u_p|_{H^2}^2
\end{aligned}$$

et donc $\|u_p\|_{H^2}^2 = \|u_p\|_{H^1}^2 + |u_p|_{H^2}^2 \leqslant \|u_p\|_{H^1}^2 + \|\Delta u_p\|_{L^2}^2$. Par conséquent la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $H^2(\mathbb{R}^n)$ et donc convergente dans $H^2(\mathbb{R}^n)$. Or sa limite est nécessairement la même que dans $H^1(\mathbb{R}^n)$. On en déduit donc que $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$. □

Théorème 4.4. *Pour toute fonction $f \in L^2(\Omega)$ il existe une unique solution (classique ou faible) au problème de Dirichlet* (7)*.*

Démonstration. On va montrer qu'il existe une unique solution faible en utilisant le Théorème de Lax-Milgram. On se place dans l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire induit par celui de $H^1(\Omega)$. Soit la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

et soit L la forme linéaire

$$L(v) = \int_\Omega fv.$$

La formulation variationnelle (8) s'écrit alors

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \qquad a(u, v) = L(v).$$

Le Théorème de Lax-Milgram nous donne donc l'existence et l'unicité d'une solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ dès lors que a est continue et coercive, et que L est continue. La continuité de L découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|L(v)| \leqslant \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1},$$

tout comme la continuité de a

$$|a(u, v)| = \Big| \sum_{i=1}^n (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2} \Big| \leqslant \sum_{i=1}^n |(\partial_i u, \partial_i v)_{L^2}| \leqslant \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L^2} \|\partial_i v\|_{L^2} \leqslant n \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}.$$

Pour la coercivité de a on utilise l'inégalité de Poincaré

$$a(u, u) = |u|_{H^1}^2 \geqslant \frac{1}{1 + C^2} \|u\|_{H^1}.$$

□

Remarque 4.5. *Le corollaire 3.24 nous assure que $H_0^1(\Omega)$ est également un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(u, v)_{H_0^1} = a(u, v)$. On aurait donc pu montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible en utilisant cette norme et le théorème de représentation de Riesz à la place de Lax-Milgram. La continuité de L découle dans ce cas des inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré.*

4.2 Élasticité linéaire